

Sakurai-Sugiura法を用いた光ファイバの分散特性 の高速高精度解析に関する研究

著者	對馬 康雄
学位名	博士（工学）
学位の種別	課程博士
報告番号	甲第460号
研究科・専攻	工学専攻
学位授与年月日	2021-03-23
URL	http://doi.org/10.15118/00010385

Sakurai-Sugiura 法を用いた光ファイバの分散特性の高速 高精度解析に関する研究

室蘭工業大学 工学研究科博士後期課程 工学専攻
15096007 對馬 康雄
指導教員 長谷川 弘治 教授

令和 3 年 2 月

目次

1	序論	1
2	光導波路の群速度と群速度分散の高精度計算法に関する研究	4
2.1	まえがき	4
2.2	Trefftz 法	5
2.2.1	円柱座標系の波動関数	5
2.2.2	Step Index Fiber の Trefftz 法による定式化	6
2.2.3	Holey Fiber の Multipole Method による定式化	6
2.3	Group Velocity と Group Velocity Dispersion の計算式	7
2.3.1	分散特性	7
2.3.2	SSM による伝搬定数の計算	7
2.3.3	固有値の陽関数形式	9
2.3.4	陰関数定理による微分値の計算	16
2.4	数値計算例	18
2.4.1	SIF の解析	18
2.4.2	HF の解析	42
2.4.3	計算時間	44
2.5	むすび	57
3	縮退モードを有する非線形固有値問題のブロック版 Sakurai-Sugiura 法による求解	58
3.1	まえがき	58
3.2	基本方程式	59
3.3	Sakurai-Sugiura 法	60
3.4	数値計算例	62
3.4.1	ブロック版 SSM による縮退モードの求解	62
3.4.2	新たな判別指標 C_l の検討	62
3.4.3	ブロック版 SSM の SSM パラメータ依存性	63
3.4.4	ブロック版 SSM の計算時間	63
3.4.5	非漏洩モードと漏洩モードの判別指標	64
3.5	むすび	65
4	Multipole Method の定式化	77
4.1	まえがき	77
4.2	Multipole Method の定式化	78
4.2.1	散乱行列	79

4.2.2	空孔間の電磁界の関係	83
4.2.3	非線形固有値問題	84
4.3	数値計算例	86
4.3.1	計算精度と計算時間	86
4.3.2	それぞれの定式化における計算時間	87
4.3.3	SSM パラメータの M の決定	88
4.4	むすび	89
5	ハイブリッドトレフツ有限要素法に基づく解析法	105
5.1	まえがき	105
5.2	HTFEM の定式化	106
5.2.1	変分表現	106
5.2.2	HTFEM の非線形固有値問題の定式化	108
5.3	数値計算例	111
5.3.1	Step Index Fiber	111
5.3.2	円柱の空孔を有する Holey fiber	111
5.3.3	環状型 Holey fiber	112
5.3.4	楕円状と円状の空孔を有する Holey fiber	113
5.4	むすび	114
6	結論	123

1 序論

近年，大容量通信機器の普及により，新規光ファイバの研究開発が盛んに行われている [1–11]．新規光ファイバを効率良く設計，開発するには電磁界解析技術が必要不可欠であり，光ファイバの断面構造を適切に構成することで，群速度や群速度分散のような分散特性を制御する．効率よく新規断面構造を創出決定するには，電磁界解析を用いた自動最適化設計を行う必要がある．光ファイバの断面構造の自動最適化設計では，最適化する構造変数を繰り返し更新し，評価関数を最小化していくため，電磁界解析と評価関数の計算を多数回行う．このため，高速で高精度な電磁界解析技術が不可欠である．電磁界解析法として，周波数領域型の有限要素法 (Finite element method:FEM) [12–18]，Trefftz 法 [19,20]，時間領域型の有限差分時間領域法 [21,22] が使われてきた．解析領域を有限要素で分割する FEM は，断面構造を三角形もしくは四角形の要素で分割して表現し，要素形状と要素内の電磁界分布を多項式で補間するため，任意形状を扱いやすい．また要素分割で，電磁界分布の近似度を調節できることから，汎用性が高く，COMSOL Multiphysics のような有限要素シミュレータが広く普及している．

しかしながら，開領域が存在する場合，開領域を模擬して閉領域化する必要がある．閉領域化するための 1 つの手法として完全整合層 (perfectly matched layer:PML) [23–31] があるが，PML の厚みや材料定数を設定する必要がある．また，PML 内部も有限要素で分割しなければならないため，最終的に解くべき行列方程式の次元数が増加する．円柱内に金属材料を含む場合には，要素分割した近似断面構造に角が生じることがあり，元来存在しない電磁界分布の集中点が発生してしまう問題がある．

他方，Trefftz 法は，電磁界の波動方程式の解である波動関数を補間関数とするため，電磁界解析を高精度に行え，同程度の精度の有限要素解析法と比較すると，最終的に解くべき行列方程式の次元数が少ない．しかしながら，複雑な断面構造の電磁界解析が容易ではないため，任意形状を扱う電磁界解析には不向きである．例えば，Trefftz 法の 1 つである Multipole Method(MM) [32–35] は，Holey fiber の空孔形状が円柱や楕円柱に限定されている．また，波動関数展開の展開次数を大きくしすぎると計算精度が劣化する問題がある．

電磁界解析手法の問題を克服する手法として，FEM と Trefftz 法を併用し，Sakurai-Sugiura 法 (SSM) [36–43] を用いて固有値を算出するハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid trefftz finite element method:HTFEM) [44–51] がある．この手法は，電磁界分布を多項式補間し，任意形状に適合しやすい通常要素と波動関数展開に基づいた Trefftz 要素を併用して要素分割を行う方法である．光ファイバのコア部，クラッド部の半無限領域，Holey fiber の空孔内，部材の半無限領域部のような均質領域をそれぞれ 1 つの Trefftz 要素で分割できるため，半無限領域を近似するための PML 領域が不要となり，固有値問題の Degrees of freedom(DOF) が同程度であると，HTFEM は，FEM より緻密な要素分割となる．また，金属円柱を取り扱う場合，誘電体と金属の 2 層の円柱と考えることで，円柱のまま取り扱える．このように，HTFEM は，FEM の問題点を克服した手法である．HTFEM は最終的に非線形固有値問題 (Nonlinear eigenvalue problem:NEP) に帰着するため，SSM

を用いた求解を行うことで、複素伝搬定数平面上の円や楕円内 [52–54] の求解領域内の全ての複素固有値と複素固有ベクトルが高精度かつ高速に計算できる。また、求解領域の内部に存在する固有値数は推定 [55,56] でき、求解領域が多重連結 [57] であっても求解できることが報告されている。しかしながら、SSM によって求解された固有値には、SSM に起因するスプリアス解が含まれている。このため、求解された固有値を判別する必要があった。

群速度や群速度分散の算出には、電磁界解析で算出した位相速度を波長に関して 1 階もしくは 2 階微分した値の計算が不可欠である [58]。微分値を算出する方法の 1 つに差分法がある。N 次精度の差分法では、適切な差分間隔を選択するため、微分値の計算を複数回行い、収束を確認する必要がある。このため、多くの計算時間が必要となる。もう一つの微分値算出法として、陰関数定理に基づいて非線形固有値問題の行列式を微分する方法がある [13]。この方法では、非線形固有値問題の次元数が大きいと、行列式の計算時間が増大する。別の微分値算出法として、FEM や SSM により生成される一般化固有値問題を 1 階、2 階微分したものに左固有ベクトルをかけて計算する方法がある。しかしながら、2 階以上の微分値の計算には、固有ベクトルの微分値が必要になる。固有ベクトルの微分値を計算する方法 [59–62] として、Nelson’s Method [63–66]、Direct Method [67]、Modal Technique [68] がある。これらの方法は、対称構造光ファイバの基本モードのような縮退モードに適用できず、電磁界の対称条件を課して縮退を取り除かなければ固有ベクトルの微分値を計算することができない。また、一般化固有値問題の次元数が大きい場合、計算時間が増大する。

本論文では、光ファイバの自動最適化設計を目的として、光ファイバの分散特性値を高速かつ高精度に算出する手法についての研究結果を取りまとめたものである。高速かつ高精度な電磁界解析手法である HTFEM と非線形固有値問題の解法であるブロック版 SSM を光ファイバの固有モード解析に適用し、HTFEM に適用でき、高精度な評価関数の算出が可能な ADEF の開発を行い、本手法の妥当性と有用性を示している。

2 章では、光ファイバの固有モード解析における群速度と群速度分散の高精度な算出が可能な ADEF について述べる。微分値計算の問題点を克服するために、SSM の適切な周回積分路により生成された 4×4 以下の一般化固有値問題 (Generalized Eigenvalue problem:GEP) の行列式から固有値を解とする 4 次以下の代数方程式を導き、固有値を微分変数である波数についての陽関数として表現し、自動微分を適用することでその微分値を得る方法 (Automatic Differentiation of Explicit Forms:ADEF) を開発した。ADEF では、SSM による GEP の固有値を、固有ベクトルを使用しないで表現することから、固有ベクトルの微分値の計算が不要である。また、対称構造光ファイバのハイブリッドモードのような縮退モードも、精度よく計算が可能である。さらに、GEP や NEP の行列の次元数が大きくても、SSM を用いることで 4×4 行列の GEP に帰着できる。具体的に、Step-index fiber と Dispersion flattened fiber である Holey fiber を解析対象として固有モード解析を行い、他の手法と群速度と群速度分散の計算精度や計算時間を比較して、ADEF の妥当性、有用性を示している。

3 章では、NEP にブロック版 SSM を適用し、漏洩モードや導波モードが精度よく計算でき、SSM に起因するスプリアス解を除去するため、判別指標を選定した結果について述べる。Holey

fiber を例として，固有値の条件数，係数行列の条件数の逆数，残差の中から，計算量が少ない固有値の条件数を判別指標とした．

4 章では，MM の空間高調波展開次数の制限を緩和する定式化を示す．Holey fiber を解析対象として，従来の定式化と再定式化した MM を比較して，再定式化した MM の空間高調波の展開次数の上限が向上したことについて述べる．また，SSM の設定するパラメータを低減するために，モーメント次数について検証している．

5 章では，光ファイバの固有モード解析における HTFEM の定式化について述べている．Step-index fiber と Holey fiber を解析対象として均質領域に Trefftz 要素を用いて解析を行い，対称条件を課さずに従来の FEM よりも計算領域を減らせ，解析解や FEM による結果と一致することから HTFEM の有用性と妥当性を示している．

6 章では，本論文の結論を述べる．

2 光導波路の群速度と群速度分散の高精度計算法に関する研究

2.1 まえがき

光ファイバの断面内構造の自動最適化設計では、群速度 (Group Velocity:GV) や群速度分散 (Group Velocity Dispersion:GVD) を目的関数とするため、GV や GVD の高精度、高速な計算が不可欠である。GV と GVD は、電磁界解析で算出した伝搬定数を波長に関して 1 階、2 階の微分した値で計算できる [58]。微分値を計算する方法の一つに、補間多項式を用いる数値微分がある。伝搬定数を波長の多項式で近似し、波長について微分することで微分値を算出する。多項式なので、 N 次精度の 1 階微分では N 個の波長の伝搬定数から、2 階微分では $N+1$ 個の波長の値から、容易に微分値が計算できる。高次の多項式で近似することで、3 階以上の高階微分も得られる。さらに、縮退、非縮退モード、異なるモードが縮退するような場合も計算できる。しかしながら、伝搬定数を複数回計算しなければならないため計算時間が長くなる。一般的に、数値計算の有効桁が十分確保できれば、波長範囲を小さくすると、すなわち差分間隔である波長間隔が小さくなると、多項式の近似精度が高くなる。しかしながら、複数の波長において微分値を算出するために、各波長を含む狭い波長範囲で多項式近似すると、伝搬定数の計算回数が増大するため計算時間が長くなる。また、用いる近似多項式の次数、標本点数、波長範囲によって、微分値の精度が変化し、解析解が未知であるため、これらの値の適切な選択は容易ではない。

一方、陰関数定理に基づいて非線形固有値問題 (Nonlinear eigenvalue problem:NEP) の行列式を計算し、自動微分により微分値を算出する方法がある。しかしながら、NEP の行列サイズが増大すると行列式の項数が増大し、計算時間も増大する。軸対称光ファイバの基本モードのような、縮退モードでは、2 階微分の計算中に中間変数の和で打ち消しあいが発生し正確な値を計算できないため、対称条件 [69,70] を課し縮退を解く必要がある。数値微分に比べて、高階微分では、必要な中間変数の数が増大するため計算時間が長くなる。

他方、FEM や SSM によって生成される一般化固有値問題 (Generalized Eigenvalue Problem:GEP) を 1 階、2 階微分したものに左固有ベクトルを掛けたものから計算する方法がある。しかしながら、2 階微分値の計算には固有ベクトルの微分が不可欠である。固有ベクトルの微分値を計算する方法として Nelson's Method [63–66]、Direct Method [67]、Modal Technique [68] [59] がある。これらの方法は、対称構造光ファイバの HE_{11} モードのような固有値と固有値の微分値がそれぞれ縮退するモードでは、電磁界の対称性を利用した対称条件を課さなければ固有ベクトルの微分値を計算することができない。FEM では一般に、GEP の次元数が大きく、固有ベクトルの微分値の計算に時間がかかる。

これらを克服するために、Sakurai-Sugiura 法 (SSM) の適切な周回積分路により生成された 4×4 以下の GEP の行列式から固有値を解とする 4 次以下の代数方程式を導き、微分する変数の陽関数として固有値を表現し、自動微分を適用することでその微分値を得る方法 (Automatic Differentiation of Explicit Forms:ADEF) を開発した。この手法では、従来計算できなかった固有値と固有値の微

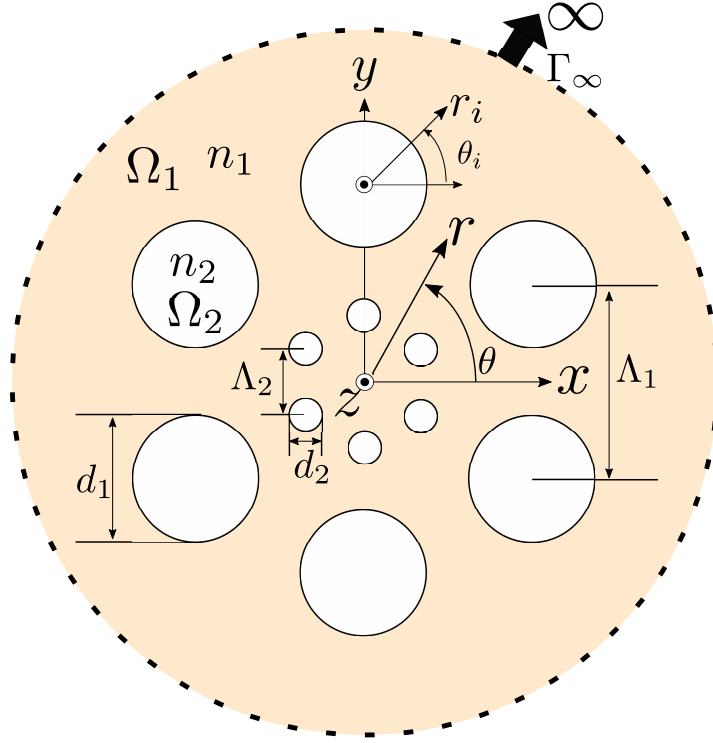


図 2.1 屈折率 n_1 の領域中に空孔が 12 個存在する Holey fiber の断面構造

分値がそれぞれ縮退する場合についても計算可能であり，SSM を用いることで，FEM による次元数が多い GEP や Trefftz 法による NEP にも適用できる．加えて，固有値を微分する変数の陽関数で表現するため，高階微分，多変数による微分についても計算可能であることより，構造最適化設計の感度解析にも適用できる．

本章では，ADEF による群速度と群速度分散の計算精度と計算時間について，調査し，その有用性を示す．具体例として，Step index fiber の HE_{11} ， TE_{01} ， HE_{21} ， TM_{01} モードについて，陰関数定理に基づいた超越方程式の計算結果 (Implicit differentiation of a transcendental equation: IDTE) と近似多項式を微分することで得られる分散特性を比較し，計算精度の確認を行う．次に，数値微分で計算精度が低下する群速度分散が 0 となる付近での計算精度を比較するために，Holey fiber の HE_{11} モードを対象として，有限要素法により算出された伝搬定数から数値微分した結果ならびに，近似多項式を微分した結果，文献 [71] に報告された結果とそれぞれ比較している．

2.2 Trefftz 法

2.2.1 円柱座標系の波動関数

図 2.1 に示すように， z 方向に一様で無限に長い光ファイバを考える．全体座標系を円柱座標系 (r, θ, z) として，構造の z 方向の一様性から複素伝搬定数を γ ，角周波数を ω とすると電磁界 Φ は，

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r, \theta) \exp\{j(\omega t - \gamma z)\} \quad (2.1)$$

と表せる．ここで， t は時間， Φ は電界 \mathbf{E} もしくは磁界 \mathbf{H} ， j は虚数単位である．長手方向の電界成分 E_z ，磁界成分 H_z はヘルムホルツ方程式，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n^2 - \gamma^2) \right] \phi_z(r, \theta) = 0 \quad (2.2)$$

を満足する．ここで， ϕ_z は電界成分 E_z もしくは磁界成分 H_z ， k_0 は真空中の波数， n は屈折率である．

2.2.2 Step Index Fiber の Trefftz 法による定式化

屈折率 n_1 の無限領域 Ω_1 中に，屈折率 n_2 で半径 a の誘電体円柱の領域 Ω_2 を配置した Step Index fiber(SIF) を考える．それぞれ，領域 Ω_1 ， Ω_2 中の長手方向の電磁界成分 $\phi_{z,i} (i=1,2)$ を，(2.2) を満たすように，Fourier-Bessel 級数展開すると，

$$\phi_{z,i}(r, \theta) = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \left[a_{m,i}^\phi J_m(\kappa_i r) + b_{m,i}^\phi H_m^{(2)}(\kappa_i r) \right] e^{jm\theta} \quad (2.3)$$

である．ここで， $a_{m,i}^\phi$ と $b_{m,i}^\phi$ は未知展開係数， $a_{m,1} = b_{m,2} = 0$ ， κ_i は領域 Ω_i 中の断面内波数で $\kappa_i = (k_0^2 n_i^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ， $i=1,2$ ， ϕ は E もしくは H ， J_m は m 次のベッセル関数， $H_m^{(2)}$ は m 次の第2種ハンケル関数， M_c は打ち切り展開項数である．各領域中の電磁界の θ 成分， $E_{\theta,i}$ ， $H_{\theta,i}$ は， $E_{z,i}$ ， $H_{z,i}$ を用いて，

$$\begin{aligned} E_{\theta,i} &= \frac{j}{\kappa_i^2} \left(k_0 \eta_0 \frac{\partial H_{z,i}}{\partial r} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial E_{z,i}}{\partial \theta} \right), \\ H_{\theta,i} &= -\frac{j}{\kappa_i^2} \left(\frac{k_0 n_i^2}{\eta_0} \frac{\partial E_{z,i}}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial H_{z,i}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と表せる．ここで， η_0 は真空中のインピーダンスである．(2.3)，(2.4) から領域 Ω_1 ， Ω_2 の半径 a の境界上で，電磁界の接線成分が連続となる条件を課し，Fourier-Bessel 級数の各次数の展開係数 $a_{m,i}^\phi$ ， $b_{m,i}^\phi$ について整理すると，固有値 γ ，固有ベクトル B_0 としての NEP，

$$T_0(\gamma, k_0) B_0 = 0 \quad (2.5)$$

を得る．ここで， $T_0(k_0, \gamma) \in \mathbb{C}^{4N \times 4N}$ ， $B_0 \in \mathbb{C}^{4N \times 1}$ である． N は，(2.3) の空間高調波の打ち切り次数 m が， $-M_c \leq m \leq M_c$ より $N = 2M_c + 1$ である．

2.2.3 Holey Fiber の Multipole Method による定式化

図 2.1 に示すように，屈折率 n_1 の無限領域中に屈折率 n_2 の空孔が 12 本配置されている Holey Fiber(HF) を考える．各空孔は，空孔の中心が正六角形の頂点と重なるように配置され，内側の正六角形の各空孔は，間隔 Λ_2 ，外側の正六角形の各空孔は，間隔 Λ_1 で配置され，内側の各空孔は直径 d_2 ，外側の各空孔は直径 d_1 である．それぞれの空孔で局所円柱座標系 (r_i, θ_i, z) を考え， i 番目の

空孔境界付近で長手方向の電磁界成分を, (2.2) を満たすように, Fourier-Bessel 級数展開すると,

$$\phi_{z,i}(r_i, \theta_i) = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \left[a_{m,i}^\phi J_m(\kappa_i r_i) + b_{m,i}^\phi H_m^{(2)}(\kappa_i r_i) \right] e^{jm\theta} \quad (2.6)$$

となる. ここで, J_m は第 1 種ベッセル関数である. (2.4) から電磁界の θ 成分を表し, 各空孔境界上で電磁界の接線成分が連続となる境界条件を課し, 文献 [72] より, Graf の加法定理に基づき各空孔間の相互作用を考慮し, 文献 [32] のようにまとめると, 最終的に, γ を固有値, B_1 を固有ベクトルにした NEP,

$$T_1(\gamma, k_0) B_1 = \{0\} \quad (2.7)$$

である. ここで, $T_1(\gamma, k_0) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は γ と k_0 の行列関数, $B_1 \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ は全ての円柱誘電体 ($i = 1, 2, \dots, N_c$) の $b_{i,m}$ で構成される列ベクトル, $N = 2N_c(M_c + 1)$, $N_c = 12$ である. Multipole Method(MM) の定式化は 4 章で述べる.

次節では, 本節で得られた非線形固有値問題から, SSM を利用した群速度, 群速度分散の計算式を示す.

2.3 Group Velocity と Group Velocity Dispersion の計算式

2.3.1 分散特性

固有モードの GV と GVD は, 複素伝搬定数 γ_l を用いて,

$$v_g(\lambda_0) = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\lambda=\lambda_0} = c_0 \left(\frac{d\gamma_l}{dk_0} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (2.8)$$

$$D(\lambda_0) = - \left. \frac{\lambda_0}{c_0} \frac{d^2 n_{\text{eff},l}}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_0} = - \left. \frac{k_0^2 c_0}{2\pi} \frac{d^2 \text{Re}(\gamma_l)}{d\omega^2} \right|_{\lambda=\lambda_0} = - \frac{k_0^2}{2\pi} \frac{1}{c_0} \frac{d^2 \gamma_l}{dk_0^2} \quad (2.9)$$

と定義する. ここで, $n_{\text{eff},l} = \gamma_l/k_0$, λ は真空中の波長である. 次節で, SSM を利用した $\gamma(k_0)$, $\frac{d\gamma_l}{d\omega} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$, $\frac{d^2 \gamma_l}{d\omega^2} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$ の k_0 についての陽的表現について述べる.

2.3.2 SSM による伝搬定数の計算

NEP の $T(\gamma, k_0)B = \{0\}$ に SSM を適用する. ここに, $T(\gamma, k_0)$ は係数行列であり, B は固有ベクトルである. これは, 例えば (2.5), (2.7) の一般化したものである. 複素 γ 平面上に求解領域を指定する, 半径 ρ , 中心 o の円を考え, SSM の積分を台形則の数値積分で近似評価すると, 一般化固有値問題 [39,45],

$$(H_1(k_0) - \xi H_0(k_0))x = \{0\} \quad (2.10)$$

を得る. ここで, ξ と x は一般化固有値問題 (2.10) の, それぞれ, 複素固有値, 複素固有ベクトルである. シフトハンケル行列 $H_1(k_0)$, ハンケル行列 $H_0(k_0)$ は, $k(k = 0, 1, \dots, 2M - 1)$ 次のモーメ

ント行列 $\mu_k(k_0) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ を用いて, それぞれ,

$$\begin{aligned} H_1(k_0) &= [h_{1,mn}(k_0)] \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1(k_0) & \mu_2(k_0) & \dots & \mu_M(k_0) \\ \mu_2(k_0) & \mu_3(k_0) & \dots & \mu_{M+1}(k_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_M(k_0) & \mu_{M+1}(k_0) & \dots & \mu_{2M-1}(k_0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} H_0(k_0) &= [h_{0,mn}(k_0)] \\ &= \begin{bmatrix} \mu_0(k_0) & \mu_1(k_0) & \dots & \mu_{M-1}(k_0) \\ \mu_1(k_0) & \mu_2(k_0) & \dots & \mu_M(k_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{M-1}(k_0) & \mu_M(k_0) & \dots & \mu_{2M-2}(k_0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

と組み立てる. ここで, $\mu_k(k_0)$ は,

$$\mu_k(k_0) = \frac{\rho}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} \left(\frac{c_n - o}{\rho} \right)^{k+1} V^H T(c_n, k_0)^{-1} V, \quad (2.13)$$

であり, ρ, o は SSM の求解領域の半径と中心, N_s は標本点数, $c_n = o + \rho \exp[j2\pi(n+1/2)/N_s]$ ($n = 0, 1, \dots, N_s - 1$), $V \in \mathbb{C}^{N \times L}$ は各要素が非ゼロであり, 各列ベクトルが互いに直交したもの, 上添字 H はエルミート共役であることを示している. L は, 求解領域内の全固有値数より大きい値に定め, モーメントの次数 $M = 1$ であり, $M \times L$ が求解領域中の全ての固有値数 N_e より大きな値に定める. 適切な N_s, ρ, o を定めることにより, $H_0(k_0), H_1(k_0)$ のランクが N_e となるため, (2.11), (2.12) を $H_{0S}(k_0) = [h_{0,mn}(k_0)], H_{1S}(k_0) = [h_{1,mn}(k_0)]$ ($m, n = 1, 2, \dots, N_e$) [39] とした,

$$(H_{1S}(k_0) - \xi H_{0S}(k_0))x = \{0\}, \quad (2.14)$$

から固有値 $\xi_l (l = 1, 2, \dots, N_e)$ が計算できる. 複素固有値 $\gamma_l(k_0)$ は, ξ_l から,

$$\gamma_l(k_0) = o + \rho \xi_l(k_0), \quad l = 1, 2, \dots, N_e. \quad (2.15)$$

と計算できる.

GV と GVD の計算式, (2.8), (2.9) は, (2.14) の固有値 ξ を用いて,

$$v_g(\lambda_0) = c_0 \left(\frac{d\xi_l}{dk_0} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right)^{-1}, \quad (2.16)$$

$$D(\lambda_0) = -\frac{1}{c_0} \frac{k_0^2}{2\pi} \rho \frac{d^2 \xi_l}{dk_0^2} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (2.17)$$

となる．これは (2.15) の両辺を k_0 について 1 階，2 階微分すると，

$$\frac{d\gamma_l}{dk_0} = \rho \frac{d\xi_l}{dk_0}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2\gamma_l}{dk_0^2} = \rho \frac{d^2\xi_l}{dk_0^2} \quad (2.19)$$

なので，(2.8)，(2.9) に代入すると，求まる． $v_g(k_0)$ と $D(k_0)$ を計算するためには， ξ_l の導関数を求め， $\lambda = \lambda_0$ での $d\xi_l/dk_0$ ， $d^2\xi_l/dk_0^2$ の値を計算する必要がある，次節で導関数の計算式について述べる．

2.3.3 固有値の陽関数形式

(2.14) の ξ は，

$$\det(H_{1S}(k_0) - \xi_l H_{0S}(k_0)) = 0, \quad (2.20)$$

とした ξ の N_e 次方程式の解である．解の公式 [72] から， $\xi_l(k_0)$ の k_0 についての陽関数が 4 次以下であれば得られる．この制約のため， $N_e = 1, 2, 3, 4$ になるように，SSM の求解領域を適切に定める必要がある．次に， $N_e = 1, 2, 3, 4$ の場合の ξ_l の k_0 についての陽関数形式を示す．

2.3.3.1 1 次方程式 ($N_e = 1$)

$N_e = 1$ の (2.20) は，

$$h_{1,11}(k_0) - \xi h_{0,11}(k_0) = 0, \quad (2.21)$$

なので，

$$\xi(k_0) = h_{1,11}(k_0)/h_{0,11}(k_0), \quad (2.22)$$

となる．ここで， $h_{w,11}(k_0)$ ($w = 0, 1$) は (2.13) の $\mu_w(k_0)$ の $(1, 1)$ 要素である．陽関数表現である (2.22) に自動微分を適用すると，数値計算により非縮退モードの微分値を得る．

2.3.3.2 2 次方程式 ($N_e = 2$)

$N_e = 2$ の (2.20) は，係数行列が 2 行 2 列であるので，

$$a(k_0)\xi^2 + b(k_0)\xi + c(k_0) = 0, \quad (2.23)$$

となる．ここで， $a(k_0)$ ， $b(k_0)$ ， $c(k_0)$ はそれぞれ，

$$a(k_0) = h_{0,11}(k_0)h_{0,22}(k_0) - h_{0,12}(k_0)h_{0,21}(k_0), \quad (2.24)$$

$$b(k_0) = -h_{0,11}(k_0)h_{1,22}(k_0) - h_{0,22}(k_0)h_{1,11}(k_0) - h_{1,12}(k_0)h_{0,21}(k_0) - h_{0,12}(k_0)h_{1,21}(k_0), \quad (2.25)$$

$$c(k_0) = h_{1,11}(k_0)h_{1,12}(k_0) - h_{1,12}(k_0)h_{1,21}(k_0) \quad (2.26)$$

である．2 次方程式の解の公式を適用すると， ξ_1 ， ξ_2 は，

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2a(k_0)} \left(-b(k_0) + \sqrt{X(k_0)} \right), \\ \xi_2 &= \frac{1}{2a(k_0)} \left(-b(k_0) - \sqrt{X(k_0)} \right).\end{aligned}\tag{2.27}$$

と表せる.

SSM により計算される固有値 ξ_1 , ξ_2 を用いて (2.23) を表すと,

$$\xi^2 - (\xi_1 + \xi_2)\xi + \xi_1\xi_2 = 0\tag{2.28}$$

となり, 係数 $a(k_0)$, $b(k_0)$, $c(k_0)$ は, $a(k_0) = 1$, $b(k_0) = -(\xi_1 + \xi_2)$, $c(k_0) = \xi_1\xi_2$ となり, $X(k_0)$ は,

$$X(k_0) = (\xi_1 + \xi_2)^2 - 4\xi_1\xi_2\tag{2.29}$$

となる. $\xi_1 = \xi_2$ の場合, (2.29) から $X(k_0) = 0$ であり, k_0 についての ξ の陽関数は,

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{b(k_0)}{2a(k_0)}\tag{2.30}$$

となる. 2つの固有値が非縮退モードの場合には (2.27) に, 2つの固有値が縮退するモードの場合には (2.30) に自動微分を適用して k_0 についての ξ の微分値が計算できる.

2.3.3.3 3 次方程式 ($N_e = 3$)

$N_e = 3$ では, 係数行列が 3 行 3 列なので,

$$a_3(k_0)\xi^3 + a_2(k_0)\xi^2 + a_1(k_0)\xi + a_0 = 0,\tag{2.31}$$

である. ここで, $a_3(k_0)$, $a_2(k_0)$, $a_1(k_0)$, $a_0(k_0)$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned}a_3(k_0) &= -h_{0,11}(k_0)h_{0,22}(k_0)h_{0,33}(k_0) + h_{0,11}(k_0)h_{0,23}(k_0)h_{0,32}(k_0) + h_{0,12}(k_0)h_{0,21}(k_0)h_{0,33}(k_0) \\ &\quad - h_{0,12}(k_0)h_{0,23}(k_0)h_{0,31}(k_0) - h_{0,13}(k_0)h_{0,21}(k_0)h_{0,32}(k_0) + h_{0,13}(k_0)h_{0,22}(k_0)h_{0,31}(k_0),\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}a_2(k_0) &= h_{0,11}(k_0)h_{0,22}(k_0)h_{1,33}(k_0) - h_{0,11}(k_0)h_{0,23}(k_0)h_{1,32}(k_0) - h_{0,11}(k_0)h_{0,32}(k_0)h_{1,23}(k_0) \\ &\quad + h_{0,11}(k_0)h_{0,33}(k_0)h_{1,22}(k_0) - h_{0,12}(k_0)h_{0,21}(k_0)h_{1,33}(k_0) + h_{0,12}(k_0)h_{0,23}(k_0)h_{1,31}(k_0) \\ &\quad + h_{0,12}(k_0)h_{0,31}(k_0)h_{1,23}(k_0) - h_{0,12}(k_0)h_{0,33}(k_0)h_{1,21}(k_0) + h_{0,13}(k_0)h_{0,21}(k_0)h_{1,32}(k_0) \\ &\quad - h_{0,13}(k_0)h_{0,22}(k_0)h_{1,31}(k_0) - h_{0,13}(k_0)h_{0,31}(k_0)h_{1,22}(k_0) + h_{0,13}(k_0)h_{0,32}(k_0)h_{1,21}(k_0) \\ &\quad + h_{0,21}(k_0)h_{0,32}(k_0)h_{1,13}(k_0) - h_{0,21}(k_0)h_{0,33}(k_0)h_{1,12}(k_0) - h_{0,22}(k_0)h_{0,31}(k_0)h_{1,13}(k_0) \\ &\quad + h_{0,22}(k_0)h_{0,33}(k_0)h_{1,11}(k_0) + h_{0,23}(k_0)h_{0,31}(k_0)h_{1,12}(k_0) - h_{0,23}(k_0)h_{0,32}(k_0)h_{1,11}(k_0),\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
a_1(k_0) = & -h_{0,11}(k_0)h_{1,22}(k_0)h_{1,33}(k_0) + h_{0,11}(k_0)h_{1,23}(k_0)h_{1,32}(k_0) + h_{0,12}(k_0)h_{1,21}(k_0)h_{1,33}(k_0) \\
& - h_{0,12}(k_0)h_{1,23}(k_0)h_{1,31}(k_0) - h_{0,13}(k_0)h_{1,21}(k_0)h_{1,32}(k_0) + h_{0,13}(k_0)h_{1,22}(k_0)h_{1,31}(k_0) \\
& + h_{0,21}(k_0)h_{1,12}(k_0)h_{1,33}(k_0) - h_{0,21}(k_0)h_{1,13}(k_0)h_{1,32}(k_0) - h_{0,22}(k_0)h_{1,11}(k_0)h_{1,33}(k_0) \\
& + h_{0,22}(k_0)h_{1,13}(k_0)h_{1,31}(k_0) + h_{0,23}(k_0)h_{1,11}(k_0)h_{1,32}(k_0) - h_{0,23}(k_0)h_{1,12}(k_0)h_{1,31}(k_0) \\
& - h_{0,31}(k_0)h_{1,12}(k_0)h_{1,23}(k_0) + h_{0,31}(k_0)h_{1,13}(k_0)h_{1,22}(k_0) + h_{0,32}(k_0)h_{1,11}(k_0)h_{1,23}(k_0) \\
& - h_{0,32}(k_0)h_{1,13}(k_0)h_{1,21}(k_0) - h_{0,33}(k_0)h_{1,11}(k_0)h_{1,22}(k_0) + h_{0,33}(k_0)h_{1,12}(k_0)h_{1,21}(k_0),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
a_0(k_0) = & h_{1,11}(k_0)h_{1,22}(k_0)h_{1,33}(k_0) - h_{1,11}(k_0)h_{1,23}(k_0)h_{1,32}(k_0) - h_{1,12}(k_0)h_{1,21}(k_0)h_{1,33}(k_0) \\
& + h_{1,12}(k_0)h_{1,23}(k_0)h_{1,31}(k_0) + h_{1,13}(k_0)h_{1,21}(k_0)h_{1,32}(k_0) - h_{1,13}(k_0)h_{1,22}(k_0)h_{1,31}(k_0),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

(2.37)

である. (2.31) の係数 $a_3(k_0)$ で両辺を割ると,

$$\xi^3 + a(k_0)\xi^2 + b(k_0)\xi + c(k_0) = 0. \tag{2.38}$$

ここで, $a(k_0) = a_2(k_0)/a_3(k_0)$, $b(k_0) = a_1(k_0)/a_3(k_0)$, $c(k_0) = a_0(k_0)/a_3(k_0)$ である. $X(k_0) = -4p(k_0)^3 - 27q(k_0)^2 \neq 0$ である場合, $p(k_0) = b(k_0) - a(k_0)^2/3$, $q(k_0) = 2a(k_0)^3/27 - a(k_0)b(k_0)/3 + c(k_0)$ となり, ξ の陽関数形式は,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{3} (A(k_0) + B(k_0) - a(k_0)), \\
\xi_2 &= \frac{1}{3} (\rho_1 A(k_0) + \rho_2 B(k_0) - a(k_0)), \\
\xi_3 &= \frac{1}{3} (\rho_2 A(k_0) + \rho_1 B(k_0) - a(k_0)),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

である. ここで, $A(k_0) = (-27q(k_0)/2 + 3/2\sqrt{-3X(k_0)})^{1/3}$, $B(k_0) = -3p(k_0)/A(k_0)$, $\rho_1 = e^{j2\pi/3}$, $\rho_2 = e^{-j2\pi/3}$ である. 固有値が 3 つとも異なる場合には, $X(k_0) \neq 0$ なので, $\sqrt{-3X(k_0)}$ の符号判定が必要である. これは, (2.14) を数値的に解いた固有値と, (2.39) の値が一致するように定める.

(2.14) から計算した固有値 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 を用いると, (2.38) の係数 $a(k_0)$, $b(k_0)$, $c(k_0)$ は,

$$a(k_0) = -(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \tag{2.40}$$

$$b(k_0) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3, \tag{2.41}$$

$$c(k_0) = -\xi_1\xi_2\xi_3, \tag{2.42}$$

であり, 係数 $p(k_0)$, $q(k_0)$, $X(k_0)$ は,

$$\begin{aligned}
p(k_0) &= -\frac{1}{3}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_3), \\
q(k_0) &= \frac{1}{27}(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3), \\
X(k_0) &= (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_2 - \xi_3)^2(\xi_3 - \xi_1)^2,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

となる．3個の固有値のうち2個が縮退している $\xi_2 = \xi_3$ の場合， ξ の陽関数形式は，

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\frac{1}{3} \left(a(k_0) - 2\sqrt{-3p(k_0)} \right), \\ \xi_2 = \xi_3 &= -\frac{1}{3} \left(a(k_0) + \sqrt{-3p(k_0)} \right).\end{aligned}\quad (2.44)$$

となる． $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ の場合では，(2.43) から， $X(k_0) = 0$ ， $p(k_0) = 0$ ， $q(k_0) = 0$ となり， ξ の陽関数形式は，

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = -\frac{1}{3}a(k_0), \quad (2.45)$$

となる．3個の固有値が非縮退ならば (2.39) に，3個の固有値のうち2個が縮退しているならば (2.44) に，3個の固有値が全て縮退しているならば (2.45) に自動微分を適用して微分値を計算する．

2.3.3.4 4次方程式 ($N_e = 4$)

$N_e = 4$ では4次方程式となり，

$$\xi^4 + a(k_0)\xi^3 + b(k_0)\xi^2 + c(k_0)\xi + d(k_0) = 0, \quad (2.46)$$

ここで， $a(k_0)$ ， $b(k_0)$ ， $c(k_0)$ ， $d(k_0)$ はハンケル行列 $H_{0S}(k_0)$ ，シフトハンケル行列 $H_{1S}(k_0)$ の要素 $h_{0,ij}$ ， $h_{1,ij}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) で構成される．解の公式 [72] より，(2.46) の解 ξ は，

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{-\eta_1} + \sqrt{-\eta_2} + \sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{-\eta_1} - \sqrt{-\eta_2} - \sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{-\eta_1} + \sqrt{-\eta_2} - \sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{-\eta_1} - \sqrt{-\eta_2} + \sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0)\end{aligned}\quad (2.47)$$

である．ここで， η_i ($i = 1, 2, 3$) は，3次方程式，

$$\eta^3 - 2p(k_0)\eta^2 + (p(k_0)^2 - 4r(k_0))\eta + q(k_0)^2 = 0 \quad (2.48)$$

の解であり， $p(k_0) = (-3a(k_0)^2 + 8b(k_0))/8$ ， $q(k_0) = (a(k_0)^3 - 4a(k_0)b(k_0) + 8c(k_0))/8$ ， $r(k_0) = (-3a(k_0)^4 + 16a(k_0)^2b(k_0) - 64a(k_0)c(k_0) + 256d(k_0))/256$ である．解の公式 (2.39) に $p(k_0)$ ， $q(k_0)$ ， $r(k_0)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1}{3}(A(k_0) + B(k_0)) + \frac{2}{3}p(k_0), \\ \eta_2 &= \frac{1}{3}(\rho_1 A(k_0) + \rho_2 B(k_0)) + \frac{2}{3}p(k_0), \\ \eta_3 &= \frac{1}{3}(\rho_2 A(k_0) + \rho_1 B(k_0)) + \frac{2}{3}p(k_0)\end{aligned}\quad (2.49)$$

となり， $A(k_0) = (-\frac{27}{2}q_t(k_0) + \frac{3}{2}\sqrt{-3X_t(k_0)})^{1/3}$ ， $B(k_0) = -3p_t(k_0)/A(k_0)$ ， $X_t(k_0) = -4p_t(k_0)^3 - 27q_t^2(k_0)$ ， $p_t(k_0) = -(p(k_0)^2 + 12r(k_0))/3$ ， $q_t(k_0) = (2p(k_0)^3 - 72p(k_0)r(k_0) + 27q(k_0)^2)/27$ となる．

(2.46) の解が縮退している場合について考える．まず， $\xi_3 = \xi_4$ と，2つの解が縮退している場合を考える．解 ξ_1, ξ_2, ξ_3 を用いて 4 次方程式を表すと，

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)^2 = 0 \quad (2.50)$$

であり，(2.49) より得られる 3 次方程式の解 η_1, η_2, η_3 は，

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{-p_t(k_0)} + \frac{2}{3}p(k_0), \\ \eta_3 &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{-p_t(k_0)} + \frac{2}{3}p(k_0) \end{aligned} \quad (2.51)$$

と表せる．ここで， $p(k_0), q(k_0), r(k_0)$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned} p(k_0) &= \frac{\xi_1\xi_2}{4} + \frac{\xi_1\xi_3}{2} + \frac{\xi_2\xi_3}{2} - \frac{3\xi_1^2}{8} - \frac{3\xi_2^2}{8} - \frac{\xi_3^2}{2}, \\ q(k_0) &= -\frac{1}{8}(\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3), \\ r(k_0) &= -\frac{1}{256}(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)^2(3\xi_1^2 - 10\xi_1\xi_2 + 4\xi_1\xi_3 + 3\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 - 4\xi_3^2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

であり， $p_t(k_0), q_t(k_0), X_t(k_0)$ は，

$$\begin{aligned} p_t(k_0) &= -\frac{1}{3}(\xi_1 - \xi_3)^2(\xi_2 - \xi_3)^2, \\ q_t(k_0) &= \frac{2}{27}(\xi_1 - \xi_3)^3(\xi_2 - \xi_3)^3, \\ X_t(k_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

である．(2.51) より， $\eta_1 = \eta_2$ なので 4 次方程式の解は，

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{-\eta_1} + 2\sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{-\eta_1} - 2\sqrt{-\eta_3}) - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_3 &= \xi_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-\eta_1} - \frac{1}{4}a(k_0) \end{aligned} \quad (2.54)$$

となる．(2.51) の $\sqrt{-p_t(k_0)}$ の符号は SSM により計算された固有値と (2.54) の差が小さいものを選択する．

次に， $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4$ のような 3 つの解が縮退している場合について考える．解 ξ_1, ξ_2 を用いて，4 次方程式を表すと，

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)^3 = 0 \quad (2.55)$$

である． $p(k_0), q(k_0), r(k_0)$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned} p(k_0) &= -\frac{3}{8}(\xi_1 - \xi_2)^2, \\ q(k_0) &= -\frac{1}{8}(\xi_1 - \xi_2)^3, \\ r(k_0) &= -\frac{3}{256}(\xi_1 - \xi_2)^4 \end{aligned} \quad (2.56)$$

となることから, (2.55) から導出される 3 次方程式の解 η_1, η_2, η_3 は,

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \frac{2}{3}p(k_0) \quad (2.57)$$

となる. したがって, 4 次方程式の解は,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-p(k_0)} - 0.25a(k_0), \\ \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-p(k_0)} - 0.25a(k_0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

となる.

次に, $\xi_1 = \xi_2$ と $\xi_3 = \xi_4$ のような, 4 個の解が 2 個ずつ縮退している場合について考える. 解 ξ_1, ξ_3 を用いて, 4 次方程式を表すと,

$$(\xi - \xi_1)^2(\xi - \xi_3)^2 = 0 \quad (2.59)$$

である. (2.59) から係数 $p(k_0), q(k_0), r(k_0)$ を ξ_1, ξ_3 表すと,

$$\begin{aligned} p(k_0) &= -\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_3)^2, \\ q(k_0) &= 0, \\ r(k_0) &= \frac{1}{16}(\xi_1 - \xi_3)^4 \end{aligned} \quad (2.60)$$

と表せ, 3 次方程式の解の計算に必要な係数 $p_t(k_0), q_t(k_0), X_t(k_0)$ は,

$$\begin{aligned} p_t(k_0) &= -\frac{1}{3}(\xi_1 - \xi_3)^4, \\ q_t(k_0) &= \frac{2}{27}(\xi_1 - \xi_3)^6, \\ X_t(k_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

となることから, 解 η_1, η_2, η_3 は,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 = 0, \\ \eta_3 &= 2p(k_0) \end{aligned} \quad (2.62)$$

となる. (2.62) から 4 次方程式の解 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ は,

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-p(k_0)} - \frac{1}{4}a(k_0), \\ \xi_3 = \xi_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-p(k_0)} - \frac{1}{4}a(k_0) \end{aligned} \quad (2.63)$$

と求まる.

最後に, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4$ のような, 4 個の解が全て縮退している場合を考える. ξ_1 を用いて, 4 次方程式を考えると,

$$(\xi - \xi_1)^4 = 0 \quad (2.64)$$

である. (2.64) から導出される 3 次方程式, (2.48) は,

$$\eta^3 = 0 \quad (2.65)$$

となる. ここで, 各係数 $p(k_0)$, $q(k_0)$, $r(k_0)$, $p_t(k_0)$, $q_t(k_0)$, $X_t(k_0)$ は, それぞれ,

$$\begin{aligned} p(k_0) &= q(k_0) = r(k_0), \\ p_t(k_0) &= q_t(k_0) = X_t(k_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

である. これらから, 4 次方程式の解は,

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = -\frac{1}{4}a(k_0) \quad (2.67)$$

となる.

2.3.4 陰関数定理による微分値の計算

群速度 (Group velocity:GV), 群速度分散 (Group velocity dispersion:GVD) は, 固有値問題の係数行列の行列方程式に陰関数定理を適用して求めることができる [13]. $N \times N$ 行列の行列式は, $N!$ 個の項からなるので, N が大きくなると実用的ではない. 高階微分になるほど, 微分値を計算する項の数が増える.

2.3.4.1 GV の計算

モード解析は, 伝搬定数 γ を固有値とする固有値問題,

$$T(\gamma, k_0)B = \{0\} \quad (2.68)$$

である. ここで, $\{0\}$ はゼロベクトルである. 固有ベクトル $B \in \mathbb{C}^N$ が $B \neq \{0\}$ となる条件より, 係数行列 $T(\gamma, k_0) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ の行列式を陰関数 $f(\gamma, k_0)$ として,

$$f(\gamma, k_0) = \det(T(\gamma, k_0)) \quad (2.69)$$

$$= 0 \quad (2.70)$$

とする. k_0 についての陰関数 $f(\gamma, k_0)$ の全微分は,

$$\frac{df}{dk_0} = \frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0} \frac{dk_0}{dk_0} + \frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dk_0} \quad (2.71)$$

となり, (2.70) から $\frac{df(\gamma, k_0)}{dk_0} = 0$ となるので, (2.71) は,

$$\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0} \frac{dk_0}{dk_0} + \frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dk_0} = 0 \quad (2.72)$$

となり,

$$\frac{d\gamma}{dk_0} = -\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0} \left(\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma} \right)^{-1}. \quad (2.73)$$

ここで, $f_{k_0} = \frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$, $f_\gamma = \frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$ が求まっていると, 値 $\frac{d\gamma}{dk_0} = -f_{k_0}/f_\gamma$ を (2.8) に代入して, GV を得る.

2.3.4.2 GVD の計算

(2.73) の両辺を k_0 について, 微分すると,

$$\frac{d^2\gamma}{dk_0^2} = \frac{\frac{df_\gamma}{dk_0} f_{k_0} - \frac{df_{k_0}}{dk_0} f_\gamma}{f_\gamma^2} \quad (2.74)$$

である. ここで, (2.74) の $\frac{df_{k_0}}{dk_0}$, $\frac{df_\gamma}{dk_0}$ は, (2.73) と同様に,

$$\frac{df_{k_0}}{dk_0} = \frac{\partial f_{k_0}}{\partial k_0} \frac{dk_0}{dk_0} + \frac{\partial f_{k_0}}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dk_0} \quad (2.75)$$

$$= f_{k_0 k_0} + f_{k_0 \gamma} \frac{d\gamma}{dk_0}, \quad (2.76)$$

$$\frac{df_\gamma}{dk_0} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial k_0} \frac{dk_0}{dk_0} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dk_0} \quad (2.77)$$

$$= f_{\gamma k_0} + f_{\gamma\gamma} \frac{d\gamma}{dk_0}, \quad (2.78)$$

となる. ここで, $f_{k_0 k_0} = \frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2}$, $f_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2}$, $f_{\gamma k_0} = f_{k_0 \gamma} = \frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma \partial k_0}$ とした. (2.76), (2.78) に (2.73) を代入すると,

$$\frac{df_{k_0}}{dk_0} = f_{k_0 k_0} - f_{k_0 \gamma} \frac{f_{k_0}}{f_\gamma} \quad (2.79)$$

$$\frac{df_\gamma}{dk_0} = f_{\gamma k_0} - f_{\gamma\gamma} \frac{f_{k_0}}{f_\gamma} \quad (2.80)$$

となる. (2.79), (2.80) を (2.74) に代入し, 整理すると,

$$\frac{d^2 \gamma}{dk_0^2} = - \frac{f_{k_0 k_0} f_\gamma^2 - 2 f_{k_0 \gamma} f_{k_0} f_\gamma + f_{\gamma\gamma} f_{k_0}^2}{f_\gamma^3} \quad (2.81)$$

を得る. (2.81) を (2.9) に代入すると, 群速度分散 D が求まる.

f_{k_0} , f_γ , $f_{k_0 k_0}$, $f_{\gamma\gamma}$, $f_{\gamma k_0}$ について次に述べる.

2.3.4.3 陰関数 $\det(T(\gamma, k_0))$ の k_0 , γ に関する微分

$f(\gamma, k_0) = \det(T(\gamma, k_0))$ を k_0 で微分することを考える. $\frac{\partial}{\partial k_0} \det(T(\gamma, k_0))$ は,

$$\frac{\partial}{\partial k_0} \det(T(\gamma, k_0)) = \sum_{j=1}^n \det \left(\begin{bmatrix} t_1^c, t_2^c, \dots, t_{j-1}^c, \frac{\partial t_j^c}{\partial k_0}, t_{j+1}^c, \dots, t_N^c \end{bmatrix} \right) \quad (2.82)$$

と表すことができる [73]. ここで, $t_j^c \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ は正方行列 $T(\gamma, k_0)$ の j 列を抜き出した列ベクトルであり, $T(\gamma, k_0) = \begin{bmatrix} t_1^c, \dots, t_j^c, \dots, t_n^c \end{bmatrix}$ である. この (2.82) は, 行列 $T(\gamma, k_0)$ の列についてまとめた表記だが, 行についてまとめると,

$$\frac{\partial}{\partial k_0} \det(T(\gamma, k_0)) = \sum_{j=1}^n \det \left(\begin{bmatrix} t_1^r \\ \vdots \\ \frac{\partial t_j^r}{\partial k_0} \\ \vdots \\ t_n^r \end{bmatrix} \right) \quad (2.83)$$

となる. ここに, $t_j^r \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ の行ベクトルは,

$$T(\gamma, k_0) = \begin{bmatrix} t_1^r \\ \vdots \\ t_j^r \\ \vdots \\ t_n^r \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

である。

次に, $f(\gamma, k_0) = 0$ を k_0 について 2 階微分すると, (2.82) は,

$$\frac{\partial^2}{\partial k_0^2} = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \det\left(\left[t_1, \dots, \frac{\partial t_l}{\partial k_0}, \dots, \frac{\partial t_j}{\partial k_0}, \dots, t_N\right]\right) + \sum_{j=1}^n \det\left(\left[t_1, \dots, \frac{\partial^2 t_j}{\partial k_0^2}, \dots, t_N\right]\right) \quad (2.85)$$

となる。ここで, (2.85) の右辺の第 1 項目の総和は $l \neq j$ である。

2.4 数値計算例

ここでは, 2 つの fiber を考える。ADEF の計算精度を調べるために, 解析解を有する SIF をはじめに考える。次に, DFF の一例として文献 [71] で報告された HF を考える。計算は, Matlab を使用して, 4, 8 倍精度の計算には Advanpix multiprecision computing toolbox [74] を使用した。

2.4.1 SIF の解析

2.4.1.1 ADEF の計算精度

SIF を伝搬する HE_{11} , TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードの GV, GVD を計算する。ここに, HE_{11} , HE_{21} モードは縮退モードである。 HE_{11} モードは (2.30), TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードは (2.54) あるいは (2.58) で計算する。SIF は, コア部が Ge を 6.3 mol% ドープした Silica, クラッドは Pure Silica とし, 屈折率は Sellmier 方程式 [75] で計算する。コア半径 $r_1 = 3.5 \mu\text{m}$ としている。(2.3) の空間高調波の打ち切り次数を $M_c = 2(-M_c \leq m \leq M_c)$ とした。SSM のパラメータは, SIF では, $L = 10$, $M = 1$, $N_s = 128$, $\rho = 10^{-4}$, SSM の積分路の中心 o/k_0 は, HE_{11} モードでは, 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ の小数点以下 5 桁, TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードでは, 3 つのモードの内, 最大と最小の実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ の平均値の小数点以下 5 桁とした。相対誤差の計算に用いた解析解は, 8 倍精度で SIF の超越方程式 [13, 14] を陰関数定理に基き微分 (Implicit differetial transcendental equation:IDTE) し, 分散特性を計算し, 34 桁に丸めたものとした。波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では, TM_{01} モードと HE_{21} モードが縮退するので, $p_t(k_0) \approx 0$ となる。式 (2.54) 中の η_i が (2.51) であるが, $\sqrt{-p_t(k_0)} \approx 0$ となるので, その微分値である $\frac{d\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0}$, $\frac{d^2\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0^2}$ の計算精度が低下するので, (2.51) から $\eta_i (i = 1, 2, 3)$ の精度が, (2.54) から $\xi_i (i = 1, 2, 3)$ の精度が低下することがわかる。

表 2.1 に, 波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ における $\sqrt{-p_t(k_0)}$, $\frac{d\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0}$, $\frac{d^2\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0^2}$ の実部の値を示す。ここで, DPA^\dagger は, 全ての計算を倍精度演算で行った値, DPA は, SSM による一般化固有値問題の行列式, 群速度, 群速度分散の計算, それぞれ, (2.20), (2.46)~(2.54), (2.16)~(2.19) を, 4 倍精度演算で行った値である。

QPA と DPA^\dagger の計算値を比較する。 $\text{Re}(\sqrt{-p_t(k_0)})$ の計算値は, 波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ では 10 桁, 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では 5 桁一致している。次に, 微分値 $\text{Re}(d\sqrt{-p_t(k_0)})$ は, 波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ では 6 桁一致しており, 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では 1 桁も一致していない。次に, 2 階微分値である $\text{Re}(\frac{d^2\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0^2})$ は, 波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ のどちらも 1 桁も一致していない。これらから, $p_t(k_0) \approx 0$ となる波長では, 全ての計算を倍精度で行った DPA^\dagger では微分値を正しく

評価できないことが確認できる。この計算精度を改善するために、4 倍精度演算は倍精度演算と比べ、計算コストが高いため、(2.20), (2.46)~(2.54), (2.16)~(2.19) の計算のみに 4 倍精度演算を適用したのが結果 DPA である。 $\text{Re}(\sqrt{-p_t(k_0)})$, $\text{Re}(d\frac{\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0})$, $\text{Re}(\frac{d^2\sqrt{-p_t(k_0)}}{dk_0^2})$ の値は、それぞれ、波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ では 10, 6, 4 桁、波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では 5, 5, 0 桁 QPA と一致している。DPA† と比べて、2 階微分値と波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ の規格化群速度 v_g/c_0 の一致桁数が増えており、 $p_t(k_0) \approx 0$ における $\sqrt{-p_t(k_0)}$ の微分値の計算精度は、改善できることが確認できた。以降の ADEF の計算には、DPA すなわち (2.20), (2.46)~(2.54), (2.16)~(2.19) を 4 倍精度演算したものを用いる。

次に、 $p_t(k_0)$ を用いて計算する $\eta_i (i = 1, 2)$ について一致桁を確認する。表 2.2 に $\sqrt{-\eta_1}$ の値とその微分値の 8 倍精度演算値を示す。 $\text{Re}(\sqrt{-\eta_1})$, $\text{Re}(d\frac{\sqrt{-\eta_1}}{dk_0})$, $\text{Re}(\frac{d^2\sqrt{-\eta_1}}{dk_0^2})$ の一致桁数は、それぞれ、波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ では 11, 7, 4 桁、波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では 11, 6, 0 桁である。このことから、波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ の場合と比較すると、 HE_{21} , TM_{01} モードが縮退する波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で、 $p_t(k_0) \approx 0$ となるので、 $\frac{d^2\sqrt{-\eta_i}}{dk_0^2}$ の誤差が大きくなり GVD の計算精度低下することがわかる。

表 2.3(a), (b) に、それぞれ、波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ における分散特性の相対誤差の SSM パラメータ依存性を示す。実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ は、両波長で、DPA では $N_s > 32$ で 10^{-15} , QPA では $N_s > 128$ で 10^{-30} であり、十分な精度が得られている。規格化群速度 v_g/c_0 の DPA は、 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ の (a) では、 $N_s > 32$, $\rho/k_0 > 10^{-3}$ で相対誤差が 10^{-13} 程度、 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ の (b) では、調査したすべての N_s , ρ/k_0 で、相対誤差が 10^{-12} 程度である。波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ と $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で相対誤差の差が大きくないことから、 TM_{01} と HE_{21} モードの縮退の影響は、微分による計算項数の増加に伴う演算誤差に比べ小さいと考えられる。QPA は、波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ で相対誤差が 10^{-30} , 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で相対誤差が 10^{-24} 程度となっている。QPA の計算桁が、仮数部が 10 進数で約 34 であることから、相対誤差が 10^{-30} 程度と予想される。しかしながら、相対誤差は 10^{-24} 程度である。群速度分散 D では、波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ では、 $N_s \geq 128$, 各半径 ρ/k_0 で収束している。波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ と $0.95854865 \mu\text{m}$ を比較すると、 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ の方が、相対誤差が大きく 10^{-1} 程度である。他方、QPA では、 TM_{01} と HE_{21} モードの縮退の影響が表れているが、DPA の相対誤差よりも小さい。以上より、 TM_{01} と HE_{21} モードが縮退することによる計算精度の低下が群速度分散 D に現れ、各半径 ρ/k_0 の $N_s \geq 128$ では、相対誤差が減少せず同程度となっている。相対誤差が増えるところでは、QPA で計算することで、計算精度を改善できる。以降、SIF では、 $N_s = 128$, $\rho/k_0 = 10^{-4}$ で計算する。

図 2.2 に、SIF の分散特性の波長 λ 依存性を示す。(a) に、実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ とコア、クラッドの屈折率と差 $\text{Difference} = \text{Re}(n_{\text{eff,HE}_{21}} - n_{\text{eff,TM}_{01}})$, (b) に規格化群速度 v_g/c_0 , (c) に群速度分散 D の波長依存性と波長 $\lambda = 0.95854865$ 付近を拡大したものを示す。ここで、黒線 (◇) が HE_{11} モード、緑線 (◁) が TE_{01} モード、青線 (□) が HE_{21} モード、赤線 (○) が TM_{01} モードであり、(◇, ▷, □, ○) のマーカーが (a) では、SIF の Trefftz 法に SSM 適用した結果、(b), (c) は ADEF による計算値であり、各色の実線が (a) では、超越方程式 (Transcendental equation:TE) に SSM を適用

した結果, (b), (c) では IDTE による計算値である. (a) の茶線は, 上がコアの屈折率 n_1 , 下がクラッドの屈折率 n_2 である. 図 2.2(a) から TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードの実効屈折率が近い値であることがわかる. また拡大図から Difference, $\text{Re}(n_{\text{eff},HE_{21}} - n_{\text{eff},TM_{01}})$, が 0 を通って正負が反転していることから, 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で HE_{21} モードと TM_{01} モードの実効屈折率が交差していることが確認できる. 図 2.2(b), (c) の規格化群速度, 群速度分散は, ADEF と IDTE が一致している. しかしながら, 群速度分散 D の拡大図から, 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近の, 縮退波長付近で IDTE と大きく異なっていることが確認できる.

図 2.3(a)(b) に, GV と GVD の相対誤差の波長 λ 依存性を示す. 真の解の値として, IDTE を QPA で求解した値を有効桁 34 桁に丸めた値を用いた. 図 2.3(a) に示した ADEF で計算した規格化群速度 v_g/c_0 の相対誤差は, DPA と QPA で, それぞれ, 10^{-11} , 10^{-12} 以下であり, QPA の方が小さい. また, ADEF で求めた図 2.3(b) の GVD の値 D の相対誤差は DPA, QPA で 10^{-6} , 10^{-12} 程度であるが, 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近では, 10^{-1} , 10^{-14} 程度と, 大きくなっている.

図 2.3(c) に, TM_{01} と HE_{21} モードの実効屈折率 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ の差の波長 λ 依存性を示す. 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で TM_{01} と HE_{21} モードが縮退していることが確認できる. 図 2.3(a), (b) は (2.54) を用いており, 表 2.1, 2.2 に示したように, TM_{01} と HE_{21} が縮退すると, $p_t(k_0) \approx 0$ となる. これは, 値, $(-p_t(k_0))^{-1/2}$, $(-p_t(k_0))^{-3/2}$ の計算精度低下を生じさせる. すなわち, $\frac{d}{dk_0} \sqrt{-p_t(k_0)}$, $\frac{d^2}{dk_0^2} \sqrt{-p_t(k_0)}$ の精度低下となり, 群速度分散 D の相対誤差が大きくなる. しかしながら, その波長 λ の範囲は $2 \times 10^{-5} \mu\text{m}$ 程度と非常に狭い.

図 2.4 は, HE_{11} モードは (2.27), TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードは (2.47) を微分して得られた v_g/c_0 , D の波長 λ 依存性をまとめたものである. ここで, HE_{11} , HE_{21} モードは縮退モードであるため 2 個の固有値が得られ, v_g/c_0 , D の大きいほうを上添え字 a , 小さいほうを b とした. (2.27) で計算した, HE_{11} モードの v_g/c_0 , D は図 2.3 と同程度の相対誤差である. TE_{01} , TM_{01} モードは, D は 10^{-1} 以下, v_g/c_0 は 10^{-13} 以下であり, 図 2.3 と比べて D の相対誤差が大きい. 特に波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差が大きくなっている. HE_{21} モードは, v_g/c_0 では 10^{-4} 以下, D では 10^{11} 以下と図 2.3 と比べ相対誤差が大きい. 以上から, 2 重縮退である HE_{11} モードは (2.30), TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードは (2.54) で計算する必要がある.

TE_{01} モードと HE_{21} モードが縮退する波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近では, どちらも相対誤差が大きくなっているが, それ以外では, 図 2.3(a), (b) と同程度の相対誤差となっている. したがって, 求める固有値の縮退度が不明でも (2.27), (2.47) を用いて v_g/c_0 , D を計算できる.

2.4.1.2 陰関数定理による微分計算を用いた方法の計算精度

規格化群速度 v_g/c_0 の計算精度について検討する.

図 2.5(a) は陰関数定理による微分値計算を用いた規格化群速度 v_g/c_0 の相対誤差の波長 λ 依存性をまとめたものである. HE_{11} , HE_{21} モードは縮退度が 2 のため, 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ が大きい方が上添え字 a , 小さい方を b とした. HE_{21} と TM_{01} モードの n_{eff} が交差する波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差が 10^{-8} 程度, 他の波長では, 10^{-14} 以下である. 図 2.5(c) に,

図 2.5(a) を QPA で計算したものを示す．波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差 10^{-25} 程度，他の波長では 10^{-32} 程度である．波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差が大きくなる原因を調べるため，波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ の $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$ の値をまとめたものを表 2.4(a)(b) に示す． $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ の DPA の $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$ の値の，実部はともに 9 桁，虚部は 0 桁 QPA と一致する． $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ の結果は，実部は 3, 4 桁，虚部はともに 0 桁 QPA と一致する．

まとめると，規格化群速度 v_g/c_0 は HE_{21} と TM_{01} モードの実効屈折率が交差する波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近で規格化群速度 v_g/c_0 の計算精度が低下する． $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$ の計算精度が低下することが原因と考えられる．

群速度分散 D の計算精度について検討する．

群速度分散 D の相対誤差の波長 λ 依存性をまとめたものを図 2.5(b) に示す． HE_{21} と HE_{11} モードの相対誤差は 10^6 以下である．波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ の TE_{01} と TM_{01} モードの相対誤差はともに， 10^{-7} , 10^0 程度である．QPA で計算した群速度分散 D の相対誤差の波長 λ 依存性を図 2.5(d) に示す． HE_{21} と HE_{11} モードの相対誤差は 10^5 である．波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865 \mu\text{m}$ の TE_{01} と TM_{01} モードの相対誤差はともに， 10^{-25} , 10^{-15} 程度である．

HE_{21} と TM_{01} モードの群速度分散 D の計算精度が低下する原因を検討するため，(2.81) を f_1 , f_2 で書き直し，

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma}{dk_0^2} &= -\frac{f_{k_0 k_0} f_\gamma^2 - 2f_{k_0 \gamma} f_{k_0} f_\gamma + f_{\gamma \gamma} f_{k_0}^2}{f_\gamma^3} \\ &= -\frac{f_1 + f_2}{f_\gamma^3} \end{aligned} \quad (2.86)$$

とし， $f_1 = f_{k_0 k_0} f_\gamma^2 + f_{\gamma \gamma} f_{k_0}^2$, $f_2 = -2f_{k_0 \gamma} f_{k_0} f_\gamma$ とする．表 2.4(a) の f_1 , f_2 , $f_1 + f_2$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial k_0^2}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial k_0 \partial \gamma}$ の実部の値はそれぞれ，8, 9, 8, 10, 9, 8 桁 QPA と一致する．しかしながら，波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ は 3, 3, 0, 3, 4, 3 である．波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial k_0^2}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)^2}{\partial k_0 \partial \gamma}$ の値の精度が低下し， $f_1 + f_2$ の計算で桁落ちが起きているためである．

HE_{21} と HE_{11} モードの群速度分散 D の計算精度が低下する原因を検討する．波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865, 1.24 \mu\text{m}$ の f_1 , f_2 , $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$ の値を表 2.5 にまとめる．波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865, 1.24 \mu\text{m}$ の f_1 と f_2 の値が，QPA で，実部と虚部ともに 30 桁以上，DPA で実部と虚部が 15 桁以上一致している．このため， $f_1 + f_2$ を計算すると打ち消しあうため，桁落ちが起こる．

以上より，陰関数定理に基づく微分値算出は，縮退度が 2 である HE_{11} や HE_{21} モードは，打ち消しあいが起こるため 2 階微分値の精度が低下する． HE_{21} と TM_{01} モードの実効屈折率が交差する付近の波長で， HE_{21} と TM_{01} モードは v_g/c_0 , D とともに計算精度が低下する．また，QPA では， v_g/c_0 と TE_{01} と TM_{01} モードの D は計算精度が改善する．

次に，ADEF と Fourier-Bessel 級数を展開した Trefftz 法から陰関数定理に基づき計算した (Implicite differential of Trefftz method: IDTM) 群速度分散値の計算精度を比較する．図 2.6(a), (b) に ADEF と陰関数定理に基づき計算した群速度分散の相対誤差の波長 λ 依存性を示す．ここで，(a) は TE_{01} , TM_{01} モード，(b) は HE_{11} , HE_{21} モードである．IDTM により計算した HE_{21} , HE_{11}

モードの値は ADEF の値よりも精度が低い。しかしながら、他のモードの相対誤差は、ADEF と同程度である。TM₀₁ と HE₂₁ モードの実効屈折率が縮退する波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近では、ADEF, IDTM とともに計算精度が低下している。これらの結果から、ADEF は、縮退、非縮退モードについて分散特性値を計算することができる。縮退する複数のモードについて計算する場合、陰関数定理に基づき分散特性値を計算する方法では、縮退を解いて各モードごとに計算する必要がある。

2.4.1.3 高次近似多項式を微分計算する方法の計算精度

図 2.2(a) の実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ を波長 λ の高次多項式で近似し、 λ について微分することで分散特性値を算出する (Numerical derivative of a higher order polynomial: NDHOP)。近似多項式の次数 p は、赤池情報量基準 (Akaike's information criterion: AIC) [76] を用いて、AIC の値が最小となる次数とし、係数は、最小自乗法により決定した。計算には、MATLAB の Curve fitting toolbox を用いた。計算式 [76] は、

$$AIC = N_d \ln(SS_E/N_d) + 2(p+2) \quad (2.87)$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{N_d} (n_{\text{eff}}(\lambda) - \hat{n}_{\text{eff}}(\lambda, p)) \quad (2.88)$$

であり、 N_d は標本点数、 $n_{\text{eff}}(\lambda)$ は算出した実効屈折率、 $\hat{n}_{\text{eff}}(\lambda, p)$ は近似多項式の計算値である。用いるデータ $n_{\text{eff}}(\lambda)$ の標本点数 N_d を決定する。図 2.7 は、波長 $\lambda = 0.6, 0.95854865, 1.24 \mu\text{m}$ での、HE₁₁ モードの群速度分散 D の相対誤差の標本点数 N_d 依存性を示したものである。波長 $0.6 \leq \lambda \leq 1.24 \mu\text{m}$ の範囲を等分割するように標本点を定めた。図 2.7(a) では、 $N_d = 31$ 、(b) と (c) では $N_d = 21$ で相対誤差が最小となっている。以下では $N_d = 21$ とする。なお、GVD の真値は微分値を、OPA で超越方程式を陰関数定理に基づき微分して計算したものとした。

図 2.8 に群速度分散 D の相対誤差の波長依存性を示す。ADEF では、波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ で相対誤差が 10^{-1} 程度と、他の波長と比較すると大きくなっている。他方、数値微分では、波長 $\lambda = 0.6, 1.24 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差が他の波長より大きくなり、波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ では、TE₀₁ モードでは 10^{-3} 程度、TM₀₁, HE₂₁ モードでは 10^{-4} 程度で、ADEF のような精度低下はない。しかしながら、最も相対誤差が小さいところで 10^{-6} であり、波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ 付近を除いた ADEF よりも相対誤差が大きい。

以上まとめると、近似多項式を作成するために、標本点数分の実効屈折率 n_{eff} を計算をする必要があり、計算コストが高い。ADEF のほうが分散特性を高精度で計算できる。ADEF では、群速度では相対誤差が 10^{-15} 、群速度分散では 10^{-7} 程度で計算でき、4 次方程式の解の公式中の変数 $p_i(k_0)$ が 3 つの固有値の差で表現されるため、3 重縮退する波長 λ 付近では、桁落ちにより計算精度が低下するが、その範囲が $4 \times 10^{-5} \mu\text{m}$ と狭いため、自動最適設計に与える影響は小さいと考えられる。多倍長演算を用いることで、計算精度の劣化を改善できる。行列方程式の係数行列の行列式を陰関数定理に基づき微分して分散特性値を算出する手法では、群速度分散の相対誤差が非縮退モードでは 10^{-7} 程度であるが、縮退モードでは 10^2 程度となる。これを、改善するためには、対称条件を課し、縮退モードの固有値を 1 個とする。NDHOP では、ADEF と比較すると、アルゴリ

ズムは単純だが計算精度が低い。まとめると、ADEFの方が、非縮退、縮退モードを高精度で計算できるため、自動最適設計に適している。

表 2.1 $\sqrt{-p_t(k_0)}$ の値及び微分値

		$\lambda = 0.6 \text{ (}\mu\text{m)}$	$\lambda = 0.95854865 \text{ (}\mu\text{m)}$
$\text{Re}(\sqrt{-p_t})$	QPA	$-4.698181460905794 \times 10^{-7}$	$-1.390564694022070 \times 10^{-20}$
	DPA†	$-4.698181460886890 \times 10^{-4}$	$-1.390582280556473 \times 10^{-20}$
	DPA	$-4.698181460886890 \times 10^{-4}$	$-1.390582280556473 \times 10^{-20}$
$\text{Re}(\frac{d\sqrt{-p_t}}{dk_0})$	OPA	$-8.516662973403087 \times 10^{-5}$	$-2.271671637854639 \times 10^{-3}$
	DPA†	$-8.516663037798163 \times 10^{-5}$	$-7.115636235959837 \times 10^{-4}$
	DPA	$-8.516663087821249 \times 10^{-5}$	$-2.271673985890361 \times 10^{-3}$
$\text{Re}(\frac{d^2\sqrt{-p_t}}{dk_0^2})$	QPA	$-1.779531403486906 \times 10^{-5}$	$1.8621467753429517 \times 10^{-3}$
	DPA†	$-1.037545831492469 \times 10^{-3}$	$1.591216364831266 \times 10^6$
	DPA	$-1.779331340813085 \times 10^{-5}$	$-8.8565160425864796 \times 10^{-2}$

表 2.2 $\sqrt{-\eta_1}$ の値及び微分値

		$\lambda = 0.6 \text{ (}\mu\text{m)}$	$\lambda = 0.95854865 \text{ (}\mu\text{m)}$
$\text{Re}(\sqrt{-\eta_1})$	QPA	$1.586476042683755 \times 10^{-2}$	$7.264052969078984 \times 10^{-2}$
	DPA	$1.586476042678148 \times 10^{-2}$	$7.264052969089318 \times 10^{-2}$
$\text{Re}(\frac{d\sqrt{-\eta_1}}{dk_0})$	QPA	$7.561363735461790 \times 10^{-3}$	$4.165751515426236 \times 10^{-2}$
	DPA	$7.561363813399965 \times 10^{-3}$	$4.165755120132892 \times 10^{-2}$
$\text{Re}(\frac{d^2\sqrt{-\eta_1}}{dk_0^2})$	QPA	$-2.306391498008696 \times 10^{-3}$	$-1.009075000639927 \times 10^{-2}$
	DPA	$-2.306452752790537 \times 10^{-3}$	1.427348844039268

表 2.3 SIF の HE₂₁ モードの分散特性 ($\text{Re}(n_{\text{eff}})$, v_g/c_0 , D) の相対誤差の SSM パラメータ N_s , ρ/k_0 の依存性

(a) 波長 $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$

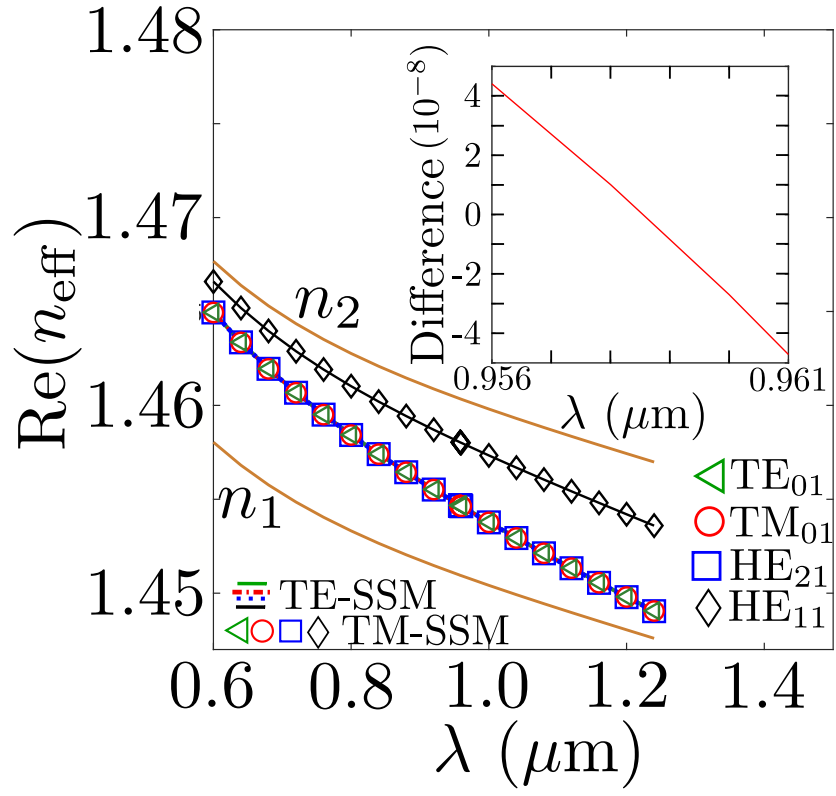
	N_s	double precision arithmetic			quadruple precision arithmetic		
		ρ/k_0			ρ/k_0		
		10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
D	32	1.53×10^{-1}	1.93×10^{-7}	5.16×10^{-6}	1.53×10^{-1}	1.66×10^{-25}	6.31×10^{-25}
	64	7.28×10^{-8}	8.11×10^{-8}	1.88×10^{-6}	7.27×10^{-8}	1.41×10^{-25}	1.02×10^{-23}
	128	4.40×10^{-10}	4.04×10^{-8}	6.91×10^{-6}	4.90×10^{-21}	1.06×10^{-25}	2.85×10^{-24}
	256	2.04×10^{-10}	4.20×10^{-8}	7.01×10^{-6}	7.27×10^{-26}	5.86×10^{-26}	6.12×10^{-24}
	512	1.51×10^{-10}	1.06×10^{-8}	1.11×10^{-6}	1.45×10^{-26}	1.88×10^{-25}	2.70×10^{-26}
v_g/c_0	32	1.79×10^{-7}	1.08×10^{-13}	1.24×10^{-12}	1.79×10^{-7}	δ_q	3.07×10^{-30}
	64	4.64×10^{-14}	1.06×10^{-13}	8.05×10^{-13}	4.45×10^{-14}	δ_q	1.02×10^{-30}
	128	1.49×10^{-14}	2.30×10^{-14}	2.51×10^{-13}	1.51×10^{-27}	δ_q	δ_q
	256	8.06×10^{-15}	1.02×10^{-14}	9.95×10^{-13}	δ_q	δ_q	δ_q
	512	δ_d	1.18×10^{-13}	2.93×10^{-12}	δ_q	δ_q	δ_q
$\text{Re}(n_{\text{eff}})$	32	7.14×10^{-13}	δ_d	δ_d	1.17×10^{-11}	δ_q	δ_q
	64	δ_d	δ_d	δ_d	1.51×10^{-18}	δ_q	δ_q
	128	δ_d	δ_d	δ_d	1.13×10^{-30}	δ_q	δ_q
	256	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q
	512	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q

The symbols “ δ_d ” in the third, fourth, and fifth columns and “ δ_q ” in the sixth, seventh, and eighth columns denote a relative error of less than 1.0×10^{-15} and 1.0×10^{-30} , respectively.

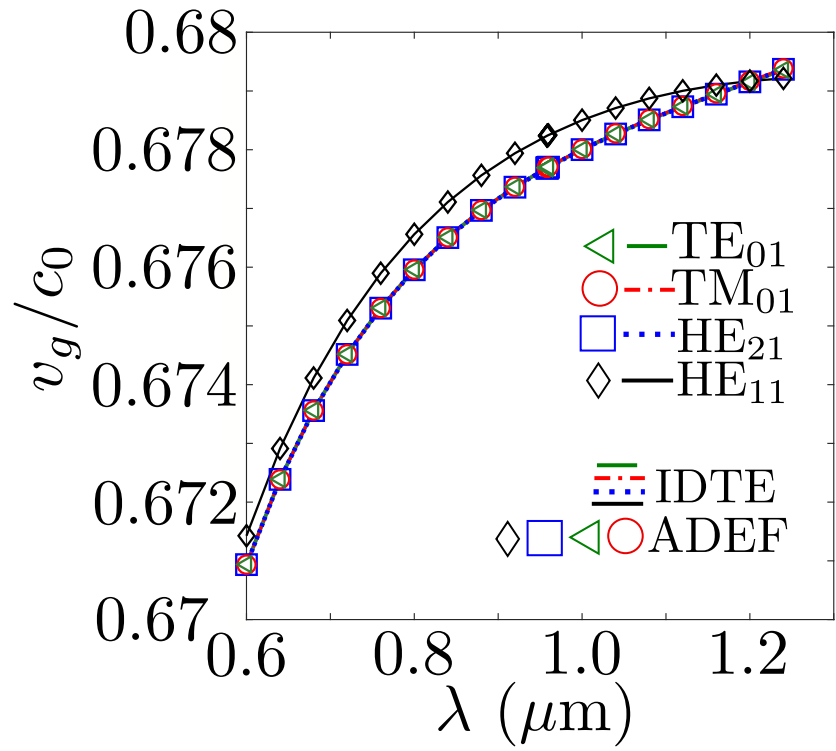
(b) 波長 $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$

	N_s	double precision arithmetic			quadruple precision arithmetic		
		ρ/k_0			ρ/k_0		
		10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
D	32	1.51×10^{-1}	2.45×10^{-1}	2.65×10^{-1}	2.95×10^{-2}	2.86×10^{-13}	1.84×10^{-13}
	64	9.25×10^{-1}	3.86×10^{-1}	6.61×10^{-1}	3.70×10^{-14}	4.83×10^{-13}	1.99×10^{-13}
	128	1.73×10^{-1}	1.91×10^{-2}	4.20×10^{-1}	2.44×10^{-14}	8.10×10^{-14}	3.32×10^{-13}
	256	2.38×10^{-1}	1.28×10^{-1}	2.09×10^{-2}	3.45×10^{-13}	8.40×10^{-13}	8.47×10^{-13}
	512	3.37×10^{-1}	9.56×10^{-2}	1.65×10^{-1}	4.98×10^{-14}	1.05×10^{-13}	2.77×10^{-13}
v_g/c_0	32	6.81×10^{-12}	1.07×10^{-11}	4.92×10^{-12}	1.32×10^{-12}	1.28×10^{-23}	8.23×10^{-24}
	64	4.15×10^{-11}	1.72×10^{-11}	3.06×10^{-11}	1.67×10^{-24}	2.17×10^{-23}	8.87×10^{-24}
	128	7.76×10^{-12}	8.99×10^{-13}	8.86×10^{-12}	1.14×10^{-24}	3.68×10^{-24}	1.49×10^{-23}
	256	1.06×10^{-11}	5.67×10^{-12}	3.47×10^{-12}	1.55×10^{-23}	3.77×10^{-23}	3.79×10^{-23}
	512	1.51×10^{-11}	4.38×10^{-12}	1.14×10^{-11}	2.18×10^{-24}	4.68×10^{-24}	1.25×10^{-23}
$\text{Re}(n_{\text{eff}})$	32	δ_d	δ_d	δ_d	1.84×10^{-21}	δ_q	δ_q
	64	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q
	128	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q
	256	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q
	512	δ_d	δ_d	δ_d	δ_q	δ_q	δ_q

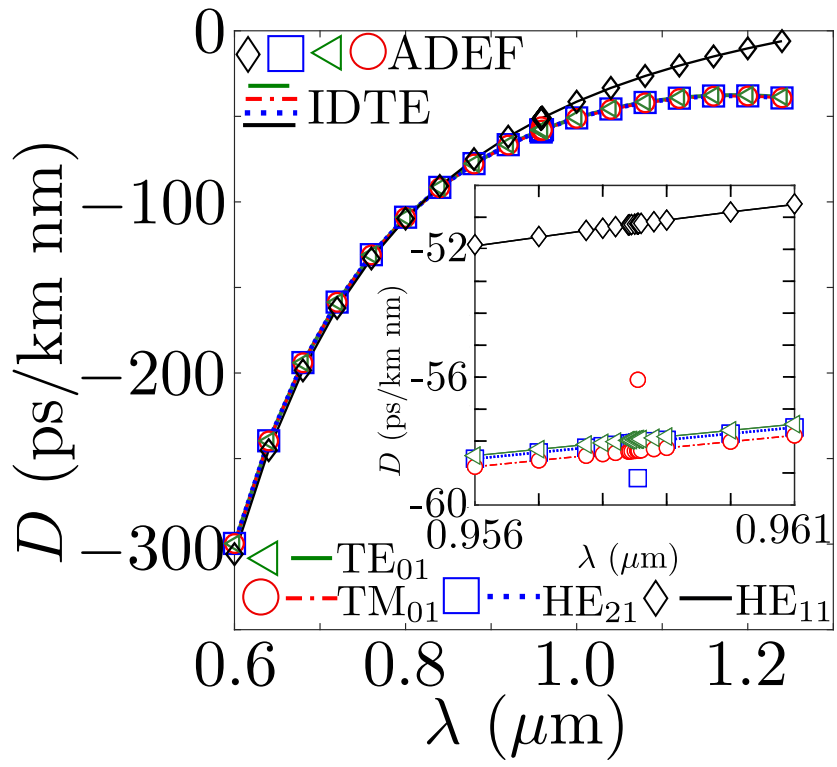
The symbols “ δ_d ” in the third, fourth, and fifth columns and “ δ_q ” in the sixth, seventh, and eighth columns denote a relative error of less than 1.0×10^{-15} and 1.0×10^{-30} , respectively.



(a)

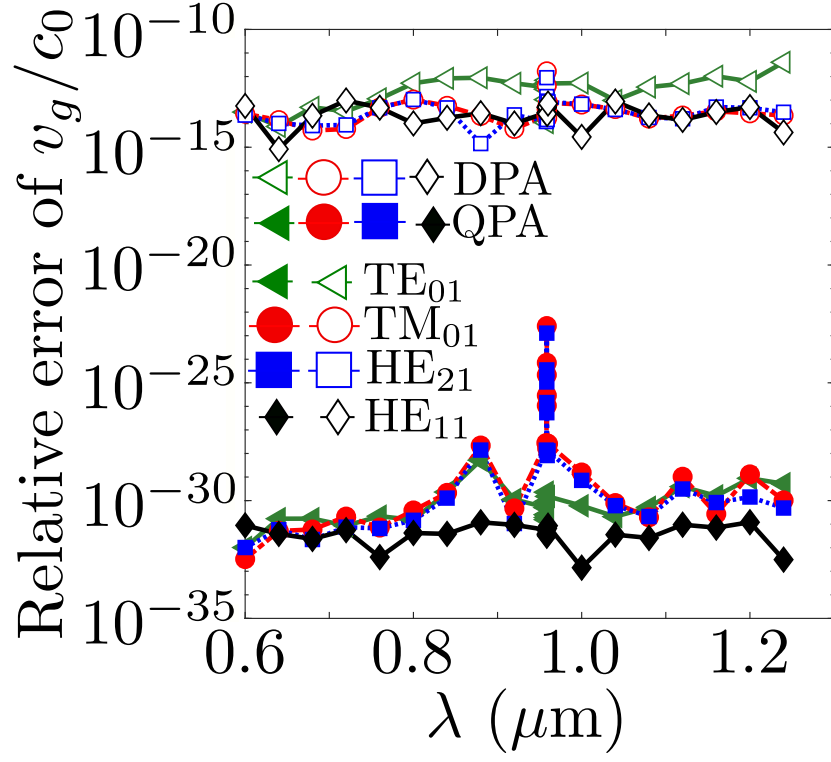


(b)

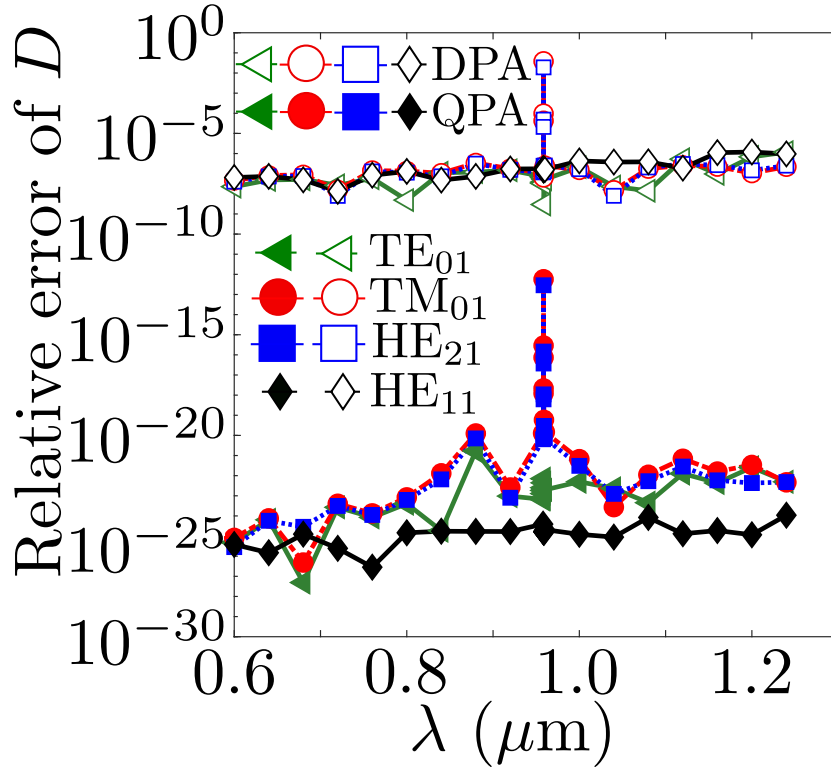


(c)

図 2.2 SIF における HE₁₁, TM₀₁, TE₀₁, HE₂₁ モードの ADEF による分散特性の波長 λ 依存性,
 (a) 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$, (b) 規格化群速度 v_g/c_0 , (c) 群速度分散 D



(a)



(b)

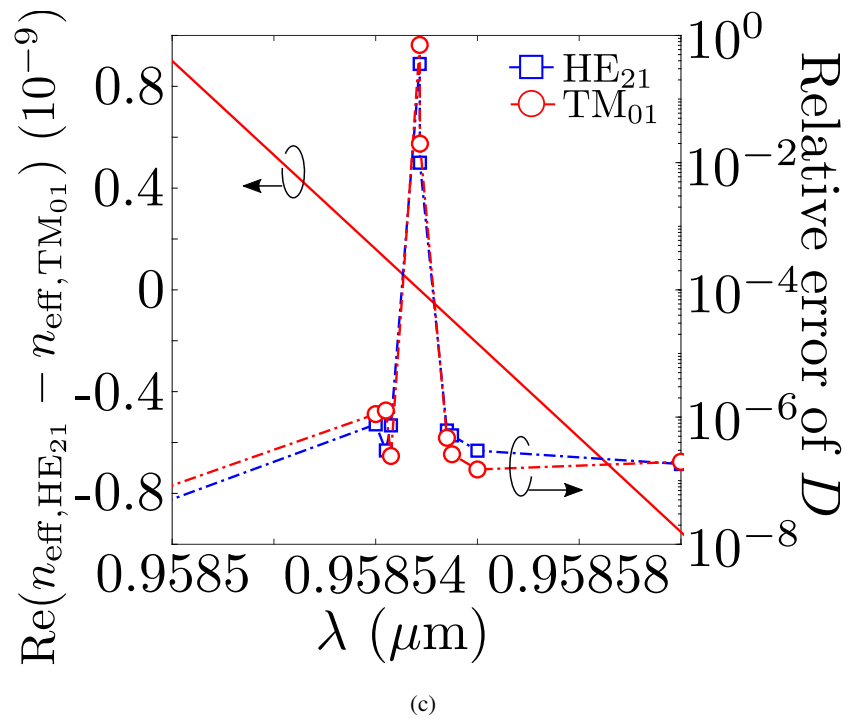
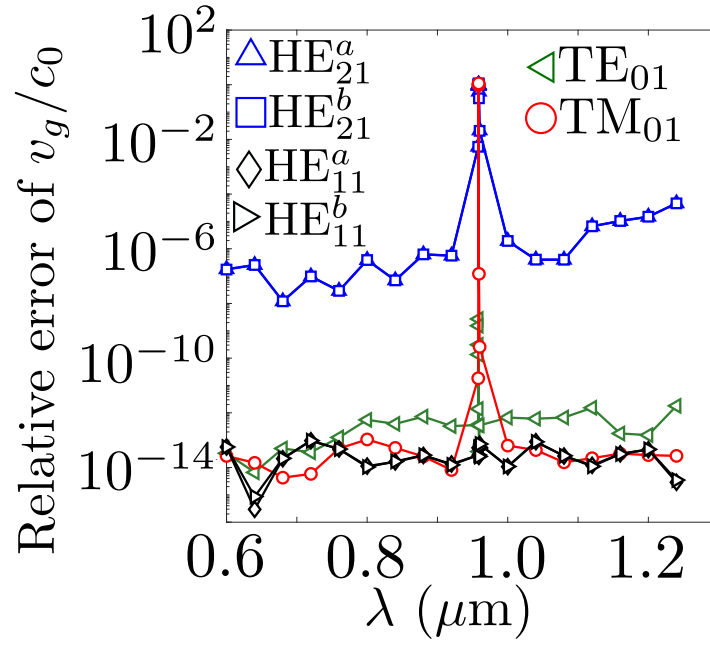
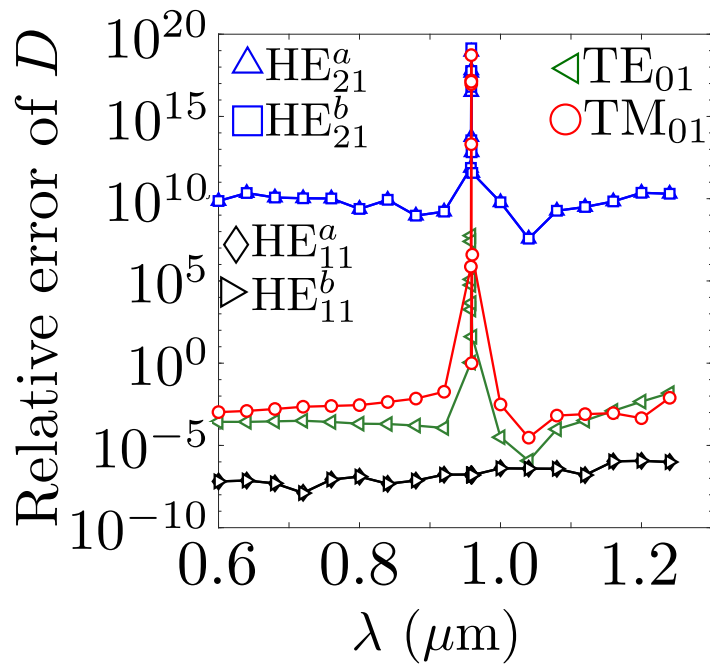


図 2.3 SIF の ADEF による分散特性の相対誤差の波長 λ 依存性, (a) 規格化群速度 v_g/c_0 の相対誤差, (b) 群速度分散 D の相対誤差, (c) 実効屈折率差 $\text{Re}(n_{\text{eff,HE21}} - n_{\text{eff,TM01}})$ と HE_{21} と TM_{01} モードの相対誤差

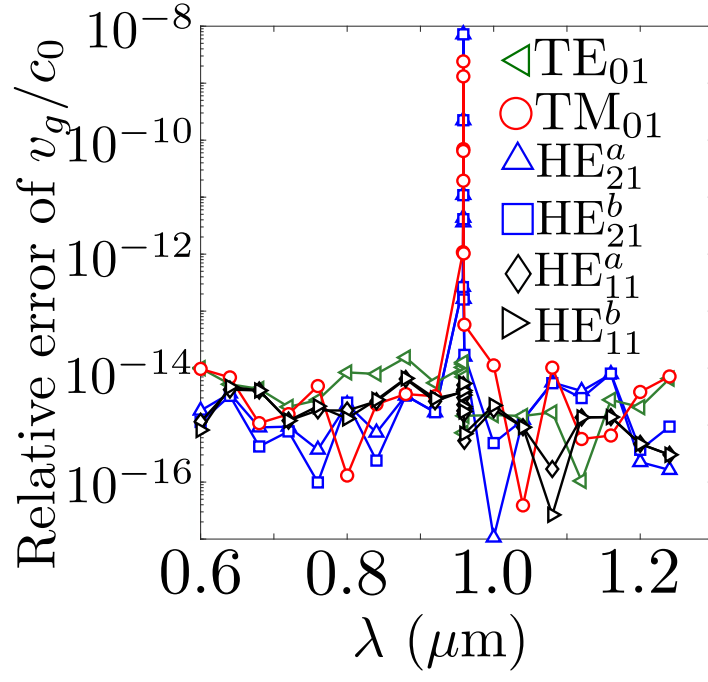


(a)

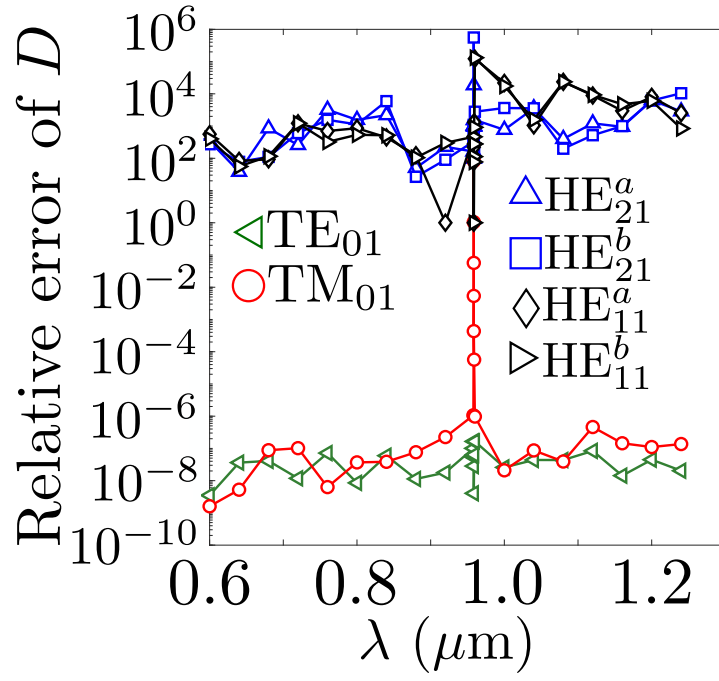


(b)

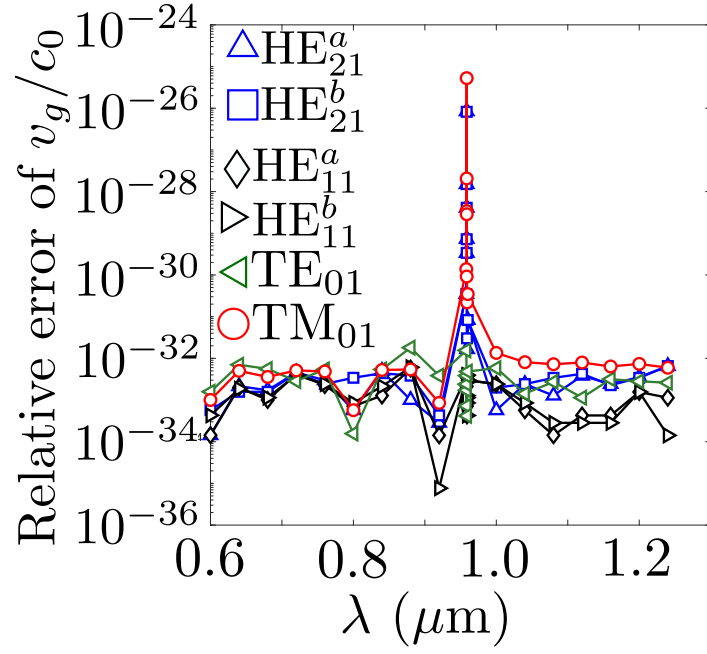
図 2.4 SIF における HE_{11} , TM_{01} , TE_{01} , HE_{21} モードの非縮退式, (2.27) と (2.47), の ADEF による分散特性の相対誤差の波長 λ 依存性, (a) 規格化群速度 v_g/c_0 の相対誤差, (b) 群速度分散 D の相対誤差



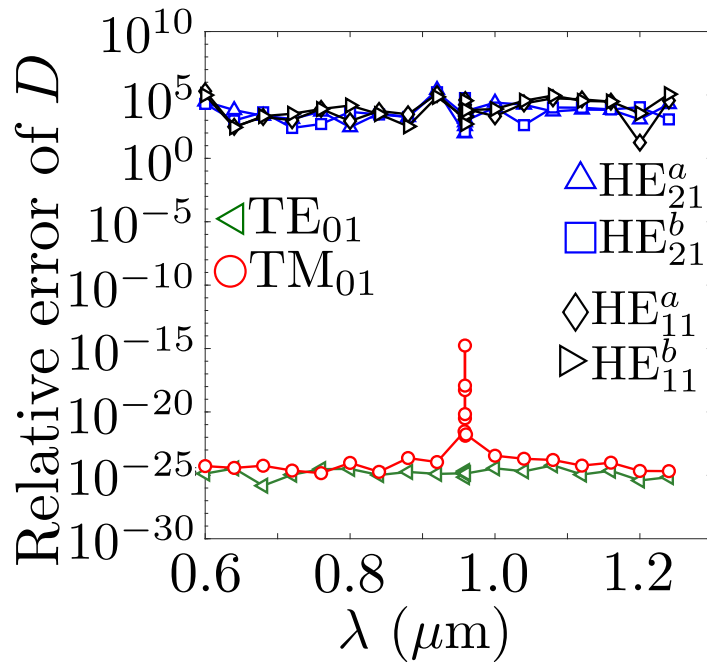
(a)



(b)



(c)



(d)

図 2.5 陰関数定理による分散特性の相対誤差の波長 λ 依存性, (a)DPA で計算した規格化群速度 v_g/c_0 , (b)DPA で計算した群速度分散 D . (c)QPA で計算した規格化群速度 v_g/c_0 . (d)QPA で計算した群速度分散 D

表 2.4 TM₀₁ モードの f_1 , f_2 , $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$, $\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2}$, $\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2}$, $\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0 \partial \gamma}$ の値.

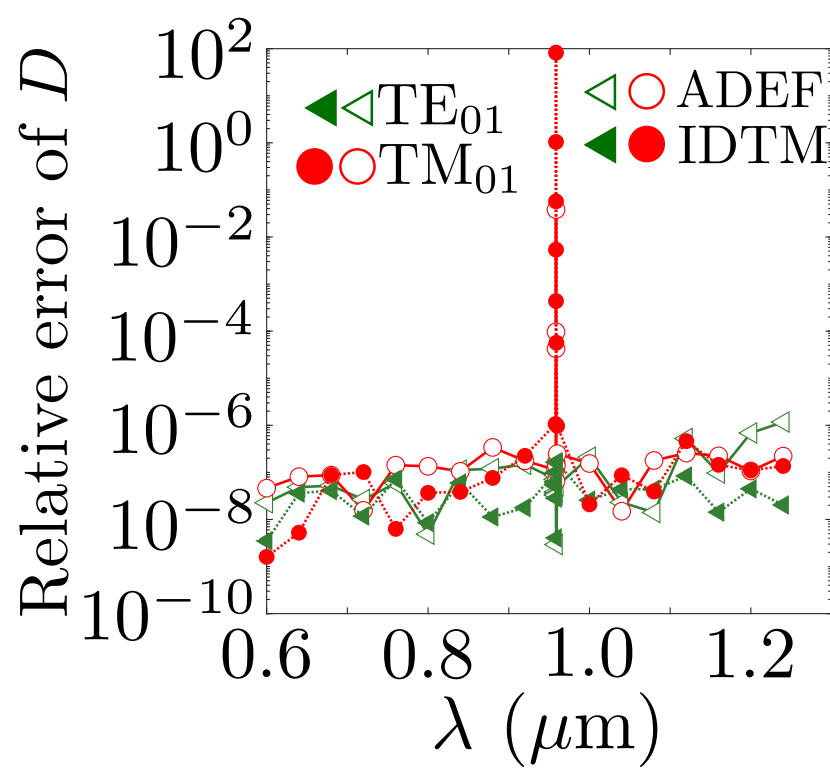
(a) $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$		
$\lambda = 0.6 \mu\text{m}$		
Re(f_1)	QPA	$2.197764287869276722232553950930601 \times 10^{-76}$
	DPA	$2.197764290813545 \times 10^{-76}$
Re(f_2)	QPA	$-2.197764275078310353354992945158594 \times 10^{-76}$
	DPA	$-2.197764278022578 \times 10^{-76}$
Im(f_1)	QPA	$-1.247274880577726164014273914822456 \times 10^{-106}$
	DPA	$1.581449177141454 \times 10^{-88}$
Im(f_2)	QPA	$1.247455082828861937766006723424707 \times 10^{-106}$
	DPA	$-1.581449203892076 \times 10^{-88}$
Re($f_1 + f_2$)	QPA	$1.279096636887756100577200651102034 \times 10^{-84}$
	DPA	$1.279096641036525 \times 10^{-84}$
Im($f_2 + f_1$)	QPA	$1.802022511357737517328086022516053 \times 10^{-110}$
	DPA	$-2.675062256949083 \times 10^{-96}$
Re($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2}$)	QPA	$1.25152019187416283410016344467287 \times 10^{-22}$
	DPA	$1.251520192184606 \times 10^{-22}$
Im($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2}$)	QPA	$-1.487386239297283737165548868931827 \times 10^{-53}$
	DPA	$1.867529419622446 \times 10^{-35}$
Re($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2}$)	QPA	$2.780097054087329299676593545011371 \times 10^{-22}$
	DPA	$2.780097054776913 \times 10^{-22}$
Im($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2}$)	QPA	$-3.305109214648977630306515785582742 \times 10^{-53}$
	DPA	$4.149824996693830 \times 10^{-35}$
Re($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0 \partial \gamma}$)	QPA	$-1.865300929926987316531984896667878 \times 10^{-22}$
	DPA	$-1.865300930389671 \times 10^{-22}$
Im($\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0 \partial \gamma}$)	QPA	$2.217199470425152541537588608215814 \times 10^{-53}$
	DPA	$-2.783868195257800 \times 10^{-35}$
Re($\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$)	QPA	$-6.286974130085009817479735870912553 \times 10^{-28}$
	DPA	$-6.286974133516525 \times 10^{-28}$
Im($\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma}$)	QPA	$1.410463589383123749253800207604208 \times 10^{-58}$
	DPA	$-1.792659091326278 \times 10^{-40}$
Re($\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$)	QPA	$9.370451860840701714676433414031412 \times 10^{-28}$
	DPA	$9.370451865955129 \times 10^{-28}$
Im($\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0}$)	QPA	$-2.102629858349088103301182428911875 \times 10^{-58}$
	DPA	$2.672342285467659 \times 10^{-40}$

(b) $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$ $\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$

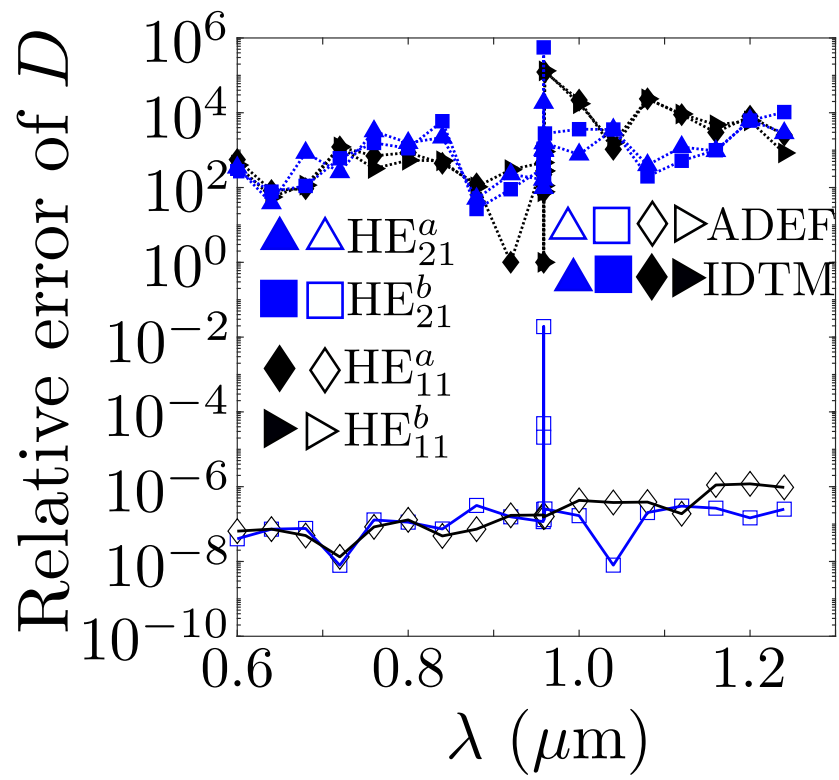
$\text{Re}(f_1)$	QPA	$-1.072689951396239166358341837767317 \times 10^{-86}$
	DPA	$-1.071626607807879 \times 10^{-86}$
$\text{Re}(f_2)$	QPA	$1.0726899513962393114037553645682 \times 10^{-86}$
	DPA	$1.071626607807868 \times 10^{-86}$
$\text{Im}(f_1)$	QPA	$-2.734988182916038651313855717164702 \times 10^{-109}$
	DPA	$-5.629728501768117 \times 10^{-92}$
$\text{Im}(f_2)$	QPA	$2.73498818292914855922961025302999 \times 10^{-109}$
	DPA	$5.629728501729180 \times 10^{-92}$
$\text{Re}(f_1 + f_2)$	QPA	$1.450454135268008823096267967337209 \times 10^{-102}$
	DPA	$-1.160846569271061 \times 10^{-100}$
$\text{Im}(f_1 + f_2)$	QPA	$1.310990791575453586528752920220395 \times 10^{-120}$
	DPA	$-3.893682859775773 \times 10^{-103}$
$\text{Re}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2})$	QPA	$-3.593658481281668320268485073526373 \times 10^{-21}$
	DPA	$-3.593089602260512 \times 10^{-21}$
$\text{Im}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma^2})$	QPA	$-1.456256988012313592478584005367769 \times 10^{-44}$
	DPA	$-4.255244353087270 \times 10^{-27}$
$\text{Re}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2})$	QPA	$-7.824693241645184816985794687900116 \times 10^{-21}$
	DPA	$-7.823454581715928 \times 10^{-21}$
$\text{Im}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0^2})$	QPA	$-3.170810066297775701014338228897058 \times 10^{-44}$
	DPA	$-9.265189058348915 \times 10^{-27}$
$\text{Re}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0 \partial \gamma})$	QPA	$5.302761095154399711383475023027736 \times 10^{-21}$
	DPA	$5.301921662221931 \times 10^{-21}$
$\text{Im}(\frac{\partial^2 f(\gamma, k_0)}{\partial k_0 \partial \gamma})$	QPA	$2.148840225978310134330796567756456 \times 10^{-44}$
	DPA	$6.278984266796867 \times 10^{-27}$
$\text{Re}(\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma})$	QPA	$-8.279226314606607036130454637188274 \times 10^{-34}$
	DPA	$-8.275776820736287 \times 10^{-34}$
$\text{Im}(\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial \gamma})$	QPA	$-8.877057737007769928506474832437109 \times 10^{-57}$
	DPA	$-1.683775347916242 \times 10^{-39}$
$\text{Re}(\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0})$	QPA	$1.221665757421065935388224536833158 \times 10^{-33}$
	DPA	$1.221156754196020 \times 10^{-33}$
$\text{Im}(\frac{\partial f(\gamma, k_0)}{\partial k_0})$	QPA	$1.309888237690518776033225660637016 \times 10^{-56}$
	DPA	$2.484534758688721 \times 10^{-39}$

表 2.5 HE₁₁ モードの f_1 , f_2 の値.

λ μm	$\lambda = 0.95854865 \mu\text{m}$			
0.6	QPA	f_1	Real	$1.875691733504523499765009198811457 \times 10^{-132}$
			Imag	$-2.807040555358116738550813450420459 \times 10^{-134}$
		f_2	Real	$1.875691733504523499765009198811473 \times 10^{-132}$
			Imag	$-2.80704055535811673855081345042048 \times 10^{-134}$
		$f_2 - f_1$	Real	$1.641563773728603366067921894084093 \times 10^{-164}$
			Imag	$-2.013798534403632745047166579777748 \times 10^{-166}$
	DPA	f_1	Real	$7.483548827123820 \times 10^{-94}$
			Imag	$4.800695464476160 \times 10^{-97}$
		f_2	Real	$7.483548827123824 \times 10^{-94}$
			Imag	$4.800695464476161 \times 10^{-97}$
		$f_2 - f_1$	Real	$3.725714860007132 \times 10^{-109}$
			Imag	$1.559311464846735 \times 10^{-112}$
0.95854865	QPA	f_1	Real	$4.649392625179904445504872456899721 \times 10^{-107}$
			Imag	$4.973520190491449662245528095546094 \times 10^{-110}$
		f_2	Real	$4.649392625179904445504872456899733 \times 10^{-107}$
			Imag	$4.973520190491449662245528095545943 \times 10^{-110}$
		$f_2 - f_1$	Real	$1.180876659533277319650755669932657 \times 10^{-139}$
			Imag	$-1.511973153482277818129222754471067 \times 10^{-141}$
	DPA	f_1	Real	$1.831306190879932 \times 10^{-70}$
			Imag	$1.973425928412080 \times 10^{-73}$
		f_2	Real	$1.831306190879932 \times 10^{-70}$
			Imag	$1.973425928412080 \times 10^{-73}$
		$f_2 - f_1$	Real	$3.217223493417518 \times 10^{-86}$
			Imag	$3.141819817790545 \times 10^{-89}$
1.24	QPA	f_1	Real	$1.410537491383793351389354909047541 \times 10^{-99}$
			Imag	$-2.41071226931217708273982152900445 \times 10^{-103}$
		f_2	Real	$1.410537491383793351389354909047537 \times 10^{-99}$
			Imag	$-2.410712269312177082739821529001836 \times 10^{-103}$
		$f_2 - f_1$	Real	$-3.434049282967030481811507222532048 \times 10^{-132}$
			Imag	$2.614274923011947721936957840871159 \times 10^{-133}$
	DPA	f_1	Real	$3.168991867762891 \times 10^{-63}$
			Imag	$8.284746136190701 \times 10^{-67}$
		f_2	Real	$3.168991867762892 \times 10^{-63}$
			Imag	$8.284746136190701 \times 10^{-67}$
		$f_2 - f_1$	Real	$8.096408020401042 \times 10^{-79}$
			Imag	$6.588873714519077 \times 10^{-83}$

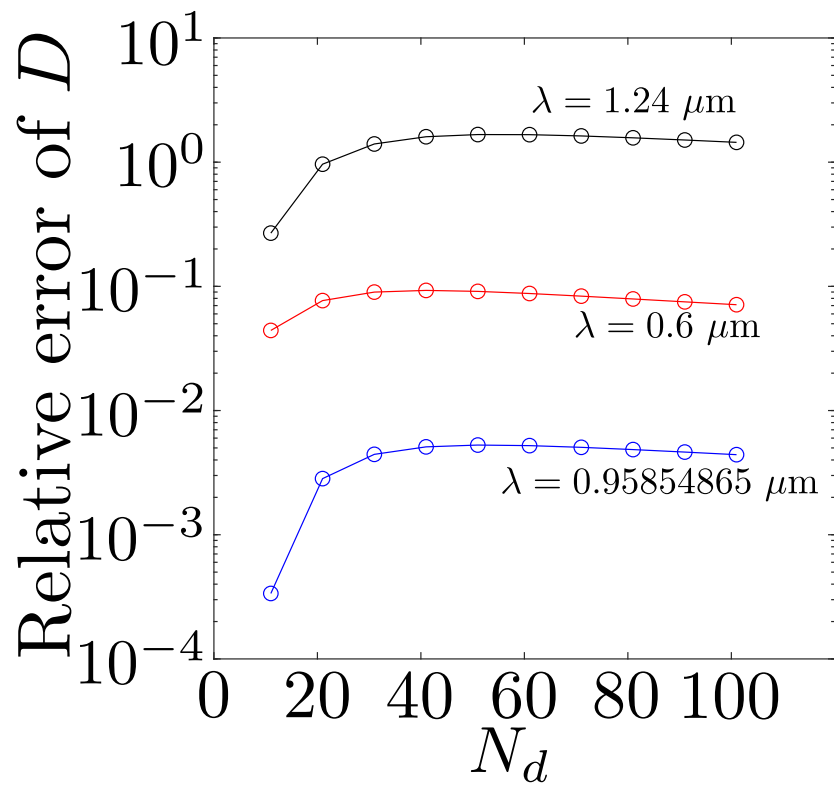


(a)

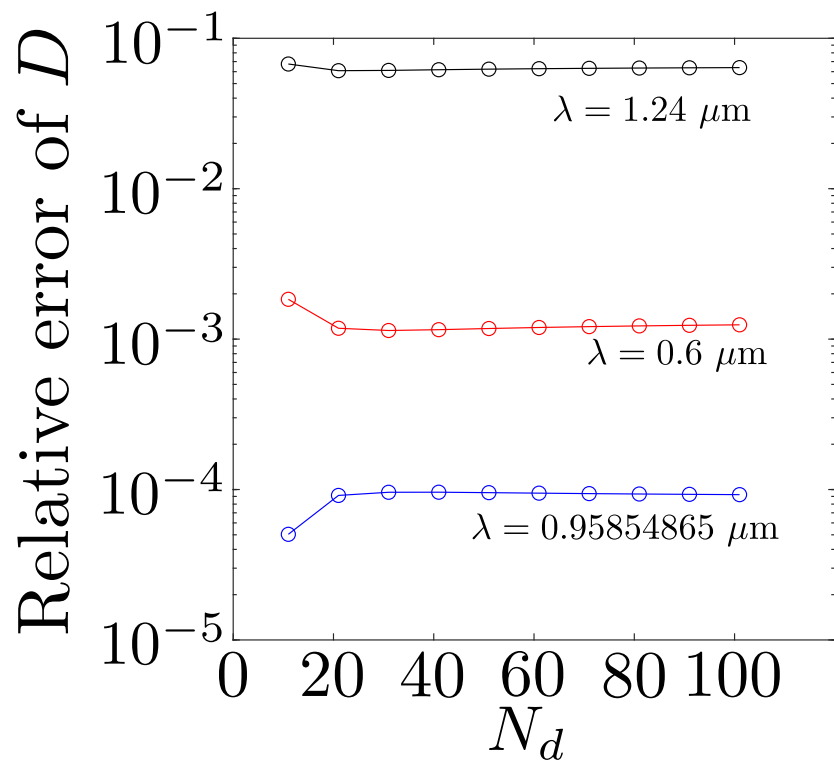


(b)

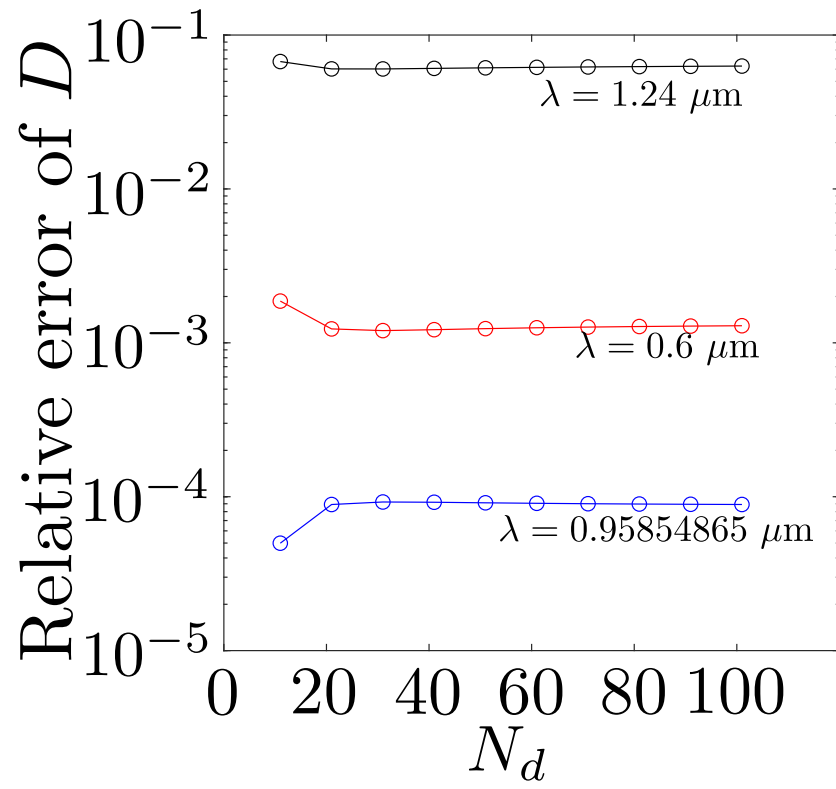
図 2.6 ADEF と陰関数定理に基づき計算した群速度分散の相対誤差の波長 λ 依存性 (a)TE₀₁, TM₀₁ モード. (b)HE₁₁, HE₂₁ モード.



(a)



(b)



(c)

図 2.7 NDHOP による群速度分散 D の相対誤差の標本点数 N_d 依存性 (a)TE₀₁ モード (b)HE₂₁ モード (c)TM₀₁ モード

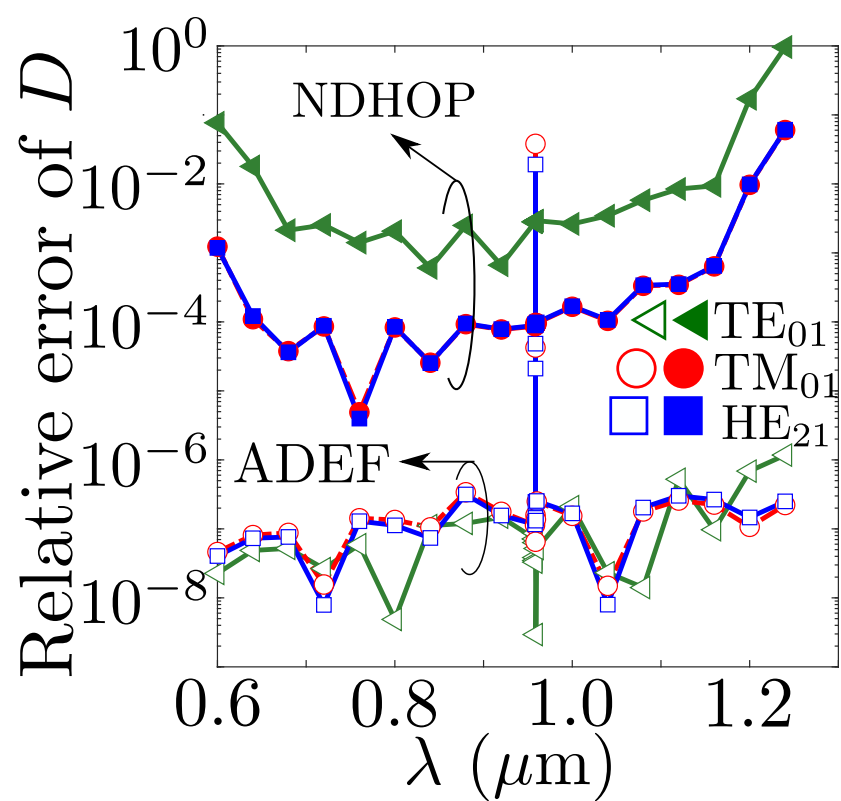


図 2.8 NDHOP による TE_{01} , TM_{01} , HE_{21} モードの群速度分散 D の相対誤差の波長 λ 依存性

2.4.2 HF の解析

群速度分散 D が $D \approx 0$ となる Dispersion flattened fiber として、図 2.1 に示す. Holey fiber(HF) [71] を考える. この HF は、波長 $\lambda \approx 1.528 \mu\text{m}$ で群速度分散 $D \approx 0$ となる. 屈折率 $n_2 = 1$, 屈折率 n_1 は材料を $70\text{TeO}_2 - 20\text{BaF}_2 - 10\text{Y}_2\text{O}_3$ として, Sellmier 方程式 [71] で計算する. 直径 $d_1/\Lambda_1 = 0.95$ の空孔の間隔 $\Lambda_1 = 4\mu\text{m}$, 直径 $d_2/\Lambda_1 = 0.15$ の空孔の間隔 $\Lambda_2/\Lambda_1 = 0.315$ とした. 数値計算のパラメータは, MM の空間高調波の打ち切り次数 $M_c = 10$, SSM では, $L = 10$, $M = 1$, $N_s = 128$, $\rho = 10^{-3}$ とした. 計算には, MATLAB を使用し, 仮数部が 10 進数で約 34 桁の 4 倍精度演算 (Quadruple Precision Arithmetic:QPA), 仮数部が 10 進数で約 74 桁の 8 倍精度演算 (Octuple Precision Arithmetic:OPA) には Advanpix Multiprecision Computing Toolbox [74] を用いた. 中央差分あるいは高次近似多項式を用いた数値微分, ADEF を用いて群速度分散 D を計算し, その精度を調べる.

2.4.2.1 高次近似多項式を用いた数値微分

群速度分散 D を計算する波長を λ_0 として閉区間 $[\lambda_0 - r_\lambda/2, \lambda_0 + r_\lambda/2]$ 中の N_d 個の波長 $(\lambda_0 - \frac{r_\lambda}{2} + \frac{r_\lambda}{N_d+1})$ における実効屈折率を計算し, λ についての P_d 次近似多項式 $\sum_{p=0}^{P_d} C_p (\lambda - \lambda_0)^p$ の係数 C_p を最小自乗法で算出した. これを微分することで群速度分散 D を計算する. 波長範囲 r_λ を, $0.4, 0.1, 0.01, 0.001 \mu\text{m}$ とした D の相対誤差の N_d 依存性を図 2.9 に示す. 近似多項式の次数 P_d は, $P_d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ の中で AIC の値が最小となる値とした. 用いた P_d を表 2.6 に示した. $\lambda_0 = 1.3, 1.5, 1.528 \mu\text{m}$ のいずれも, $r_\lambda = 0.1$ で相対誤差が最小となっている. また $r_\lambda = 0.1, 0.01, 0.001 \mu\text{m}$ では, r_λ が大きいほど, 相対誤差が小さい. しかしながら, $r_\lambda = 0.4$ では $r_\lambda = 0.1$ よりも相対誤差が大きいことから適切な波長範囲 r_λ を選択する必要があることが確認できる.

相対誤差 R_e が最小となる r_λ , N_d の組を (r_λ, N_d, R_e) と表すと, 図 2.9 の (a) $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ では, $(0.1, 51, 1.0 \times 10^{-9})$, $(0.01, 51, 7.4 \times 10^{-7})$, $(0.001, 101, 2.7 \times 10^{-6})$, $(0.4, 101, 7.1 \times 10^{-7})$, (b) $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ では, $(0.1, 101, 1.3 \times 10^{-7})$, $(0.01, 101, 3.1 \times 10^{-6})$, $(0.001, 101, 1.4 \times 10^{-4})$, $(0.4, 101, 5.5 \times 10^{-6})$, (c) $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$ では, $(0.1, 101, 7.9 \times 10^{-6})$, $(0.01, 101, 5.4 \times 10^{-3})$, $(0.001, 51, 4.7 \times 10^{-1})$, $(0.4, 101, 1.4 \times 10^{-2})$ となっている. 波長 $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$ の相対誤差が他の (a), (b) と比較して大きい. これは, 波長 $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$ の微分値が 0 に近いいため, 各項の足し合わせで打ち消しあいが発生しているためである.

群速度分散 D の相対誤差の波長間隔 Δ_λ 依存性を図 2.10 に示す. 多項式の次数は 2~8 次までとし, 調査波長は $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, 標本点は 9 点とした. それぞれの適切な波長間隔 Δ_λ は, 2, 3 次は 2^{-10} 程度, 4, 5 次は 2^{-8} 程度, 6, 7 次は 2^{-7} 程度, 8 次は 2^{-5} となり, 多項式の次数ごとに異なっている. また適切な r_λ で計算した群速度分散 D の値は, ADEF の値よりも相対誤差が小さい.

図 2.11 は, 群速度分散 D の相対誤差の波長 λ 依存性をまとめたものである. 多項式を作成する波長範囲を $1.5 < \lambda < 1.6 \mu\text{m}$ とし, 波長範囲を等 8 分割し, 2~8 次までの多項式を作成した. ま

た、この時の波長間隔 $\Delta\lambda = 0.0125 \mu\text{m}$ である。ADEF の相対誤差よりも、2, 3, 4 次の多項式による相対誤差は大きく、5, 6, 7, 8 次の多項式による相対誤差は小さい。

以上をまとめると、近似多項式を微分して分散特性値を計算する方法では、適切な近似多項式を作成するため、適切な波長範囲、標本点数 N_d 、近似多項式の次数を選択することで、相対誤差が 1.0×10^{-6} 程度と、ADEF の 10^{-4} 程度よりも小さくなる。また、それぞれの次数によって適切な波長間隔がことなる。自動最適設計を行うことを考えると、適切な選択を行うことは容易ではないため、それらパラメータの選択が不要な ADEF の方が容易に計算できる。

2.4.2.2 中央差分近似による数値微分

図 2.12 に中央差分近似で計算した群速度分散 $D(\lambda)$ の相対誤差の差分間隔 $\Delta\lambda$ 依存性を示す。 n_{eff} は、Multipole Method (MM) と Finite element analysis (FEA) で求めた。FEA では、図 2.13 に示すように対称条件を課し、1/4 領域を解析対象として、Perfectly matched layer (PML) の厚さ $r_{\text{PML}}/\Lambda_1 = 0.75$ 、原点から PML までの距離 $r_p/\Lambda_1 = 1.125$ とした。要素分割は、波長 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ において、初期メッシュを作成、解析した後、Adaptive mesh refinement を 5 回行った。Degrees of freedom(DOF) は、1 回目で 99461、5 回目で 9206908 であった。

MM で算出した n_{eff} を中央差分した結果 (\triangle) は、6 次精度中央差分による結果の相対誤差が 2 次、4 次よりも小さい。 $D \approx 0$ となる $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$ での相対誤差は、 $\lambda = 1.3, 1.5 \mu\text{m}$ での値よりも大きい。適切な差分間隔 $\Delta\lambda$ は波長に依存せず、2 次精度中央差分では、 $\Delta\lambda = 2^{-8}$ 、4, 6 次精度中央差分では、 $\Delta\lambda = 2^{-6}$ となっている。ADEF による D の相対誤差は 2 次精度中央差分よりも小さく、4, 6 次精度中央差分よりも大きい。

FEA では、DOF が 99461 の 1 回目の分割で十分であったことがわかる。 $D \approx 0$ となる波長 $1.528 \mu\text{m}$ での相対誤差は波長 $1.3, 1.5 \mu\text{m}$ での誤差よりも大きい。ADEF での D の相対誤差は、波長 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ では、 5×10^{-7} と FEA の誤差よりも小さく $\lambda = 1.5, 1.528 \mu\text{m}$ では 2.6×10^{-4} 、1.2 と大きい。いずれの計算結果も $D \approx 0$ となる波長 $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$ で相対誤差が大きくなっている。

ADEF の有効桁について考える。表 2.7 に、SSM の乱数行列 V を変化させた場合の群速度分散 D の値を示す。ここで、analytic は 8 倍精度で計算した結果、rand 1 から rand 4 は、それぞれ、乱数のシード値を変更して生成した V を用いた結果である。いずれも、小数点以下 3 桁が一致していることから、このように SSM の乱数行列 V を変化させて一致している桁数が、有効桁と考えられるので、ADEF で計算した D は、整数部の桁数に小数点以下 3 桁を加えたものとなる。例えば、 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ では 5 桁となる。これは、相対誤差 5.8×10^{-7} と符合する。

図 2.14 に、分散特性の波長 λ 依存性を示す。FEA の計算値 D は、実効屈折率 n_{eff} の差分間隔 $\Delta\lambda = 2^{-8}$ の 2 次中央差分値であり、実線は ADEF の結果である。(a) の実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ 、(b) の規格化群速度 v_g/c_0 、(c) の群速度分散 D は一致している。(c) の群速度分散 D は、文献 [71] と比較するため、拡大図を示した。ADEF, FEA の値が一致しているが、文献値とは、異なっている。

図 2.15 に規格化群速度 v_g/c_0 、群速度分散 D の相対誤差の波長 λ 依存性を示す。赤線が

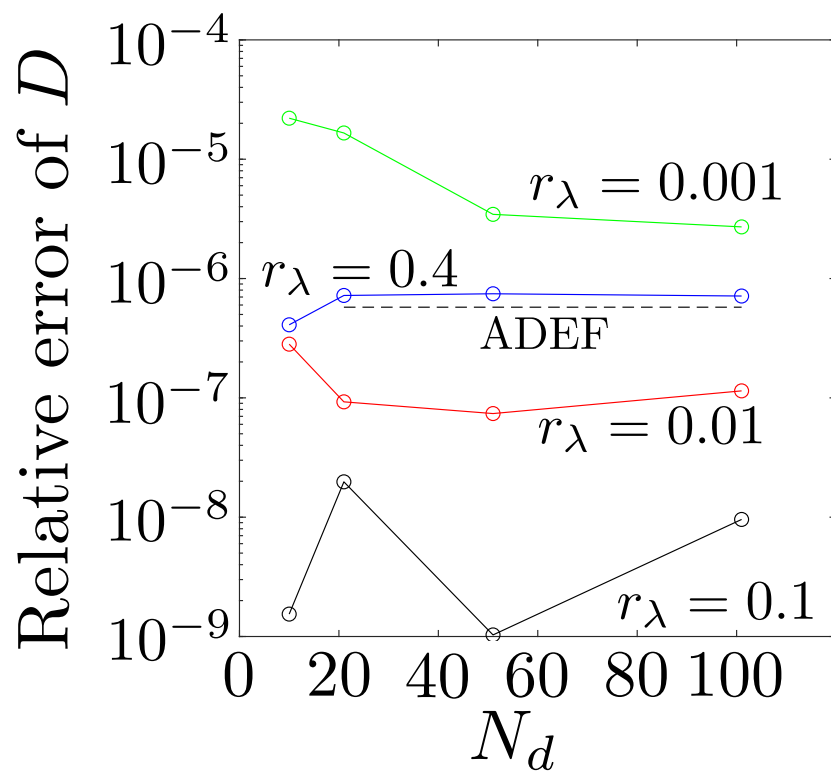
$d_2/\Lambda_1 = 0.1495$, 青線が $d_2/\Lambda_1 = 0.15$ の計算結果である。FEA では, Adaptive mesh refinement を用いており, \triangle , \square , \diamond は, それぞれ, DOF が 9316, 23327, 133215 での結果 \triangle , \square , \diamond は DOF が 9059, 22557, 134348 の結果である。図 2.15(b) に示した D の値は波長 $\lambda = 1.528, 1.5678 \mu\text{m}$ 付近で相対誤差が大きくなっている。これは, 図 2.14(c) の拡大図に示したように, この 2 波長で $D \approx 0$ となるためである。FEA による結果は, DOF が大きくなると, 相対誤差の最大値が小さくなっている。 $d_2/\Lambda_1 = 0.15 \mu\text{m}$ では, DOF が 9059, 2257 の FEA の結果よりも ADEF の方が相対誤差は小さく, $d_2/\Lambda_1 = 0.1495 \mu\text{m}$ では, DOF が 9316, 23327 よりも ADEF の方が相対誤差は小さい。このことから, ADEF は, DOF が 100000 以上の FEA と同程度の精度であることが確認できる。

2.4.3 計算時間

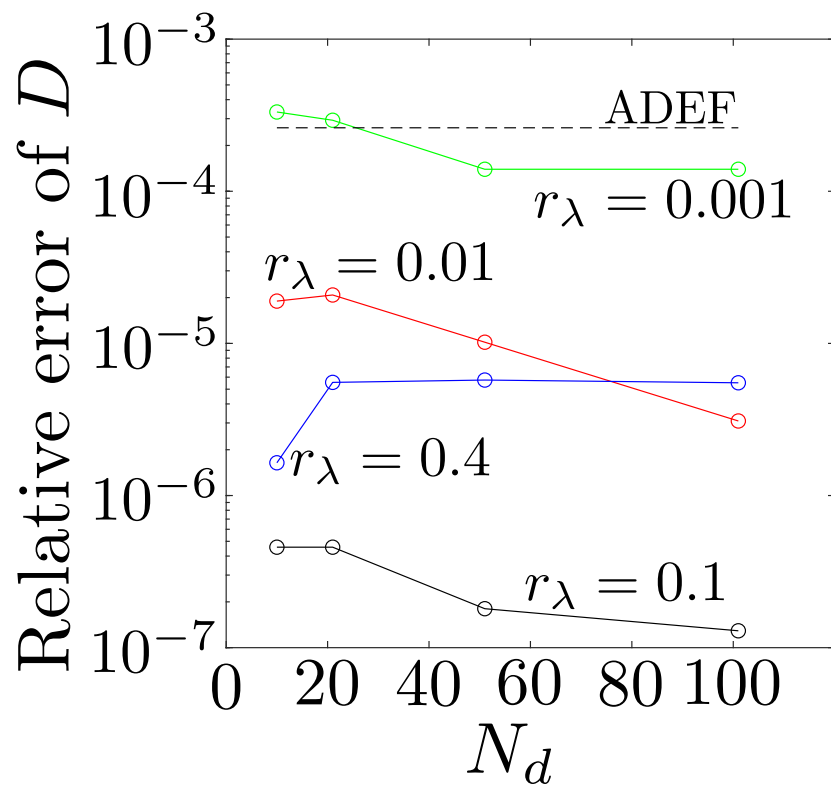
CPU が Intel Xenon Gold 6140 2.3 GHz, メモリが 96 GB の計算機上で, n_{eff} , v_g/c_0 , D の値を Trefftz 法と ADEF で 50 回計算し, その平均値を 1 回あたりの計算時間とする。また, v_g の計算時間は n_{eff} の計算時間を含み, D は n_{eff} , v_g の計算時間が含まれている。表 2.8 は, SIF, HFDFE の Trefftz 法と ADEF による計算時間を調べたものである。 n_{eff} の計算時間は Trefftz 法を SSM で解いたものである。DPA で n_{eff} , v_g/c_0 , D の計算時間は, それぞれ, SIF では 0.092, 0.114, 0.139 s, HFDFE では 1.12, 2.29, 3.30 s である。

高次近似多項式を用いた数値微分による群速度分散 D の計算時間は, n_{eff} の計算時間が支配的なので, $N_d \times (n_{\text{eff}} \text{ 1 回の計算時間})$ となる。図 2.7 に示した $N_d = 21$ での SIF の D の計算時間は 1.93 s となる。 D は実効屈折率 n_{eff} を波長 λ で 2 階微分するので, 近似多項式の次数は最低でも 3 次である。この場合, 必要な標本点は最低で $N_d = 4$ であり, 計算時間は 0.368 s となる。HFDFE では, $N_d = 4, 21$ の計算時間は 4.48 s, 23.5 s となる。また, 中央差分による群速度分散 D の計算時間は, 図 2.12 では, 4 次精度以上の中央差分で ADEF よりも相対誤差が小さいことから, 4 次精度中央差分の計算時間を考える。適切な差分間隔 Δ_λ が与えられた場合, 4 次中央差分の計算に必要な実効屈折率 n_{eff} の数は, $\lambda_0 + k\Delta$ ($k = -2, -1, 0, 1, 2$) の 5 つである。4 次中央差分の計算時間は, SIF では 0.460 s, HFDFE では 5.60 s となる。適切な差分間隔 Δ_λ を決定するためには, 最低 3 つの差分間隔 Δ_λ で計算するため, 実効屈折率 n_{eff} を 7 回計算するので, SIF では 0.644 s, HFDFE では 7.84 s となる。

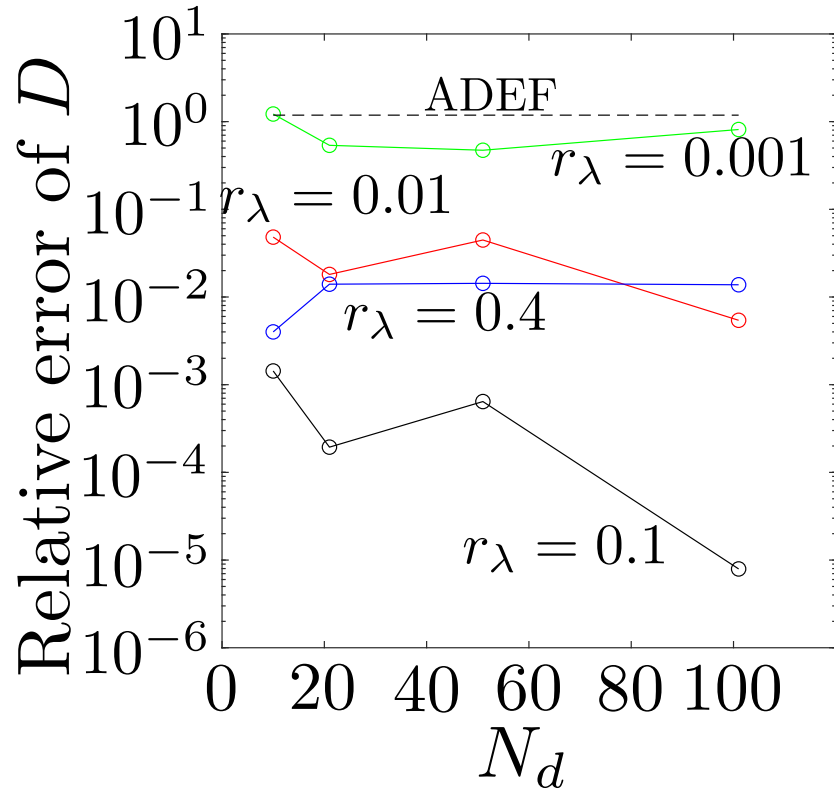
2 次精度中央差分では, 適切な差分間隔 Δ_λ が与えられる場合, n_{eff} を 3 個計算する日露があり, 計算時間は, SIF, HEDFE はそれぞれ, 0.276 s, 3.36 s となる。以上から, SIF, HFDFE とともに ADEF の方が計算時間が短い。



(a)



(b)



(c)

図 2.9 近似多項式を微分して得た HE₁₁ モードの群速度分散 D の相対誤差の標本点数 N_d 依存性.
(a) $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$. (b) $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$. (c) $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$.

表 2.6 AIC を最小にする高次多項式の次数 P_d

	$\lambda = 1.3 (\mu\text{m})$				$\lambda = 1.5 (\mu\text{m})$				$\lambda = 1.528 (\mu\text{m})$			
	N_d				N_d				N_d			
r_λ	10	21	51	101	10	21	51	101	10	21	51	101
0.4	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
0.1	7	7	7	9	7	7	9	8	7	7	7	7
0.01	5	5	4	5	4	4	5	6	5	4	4	4
0.001	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3

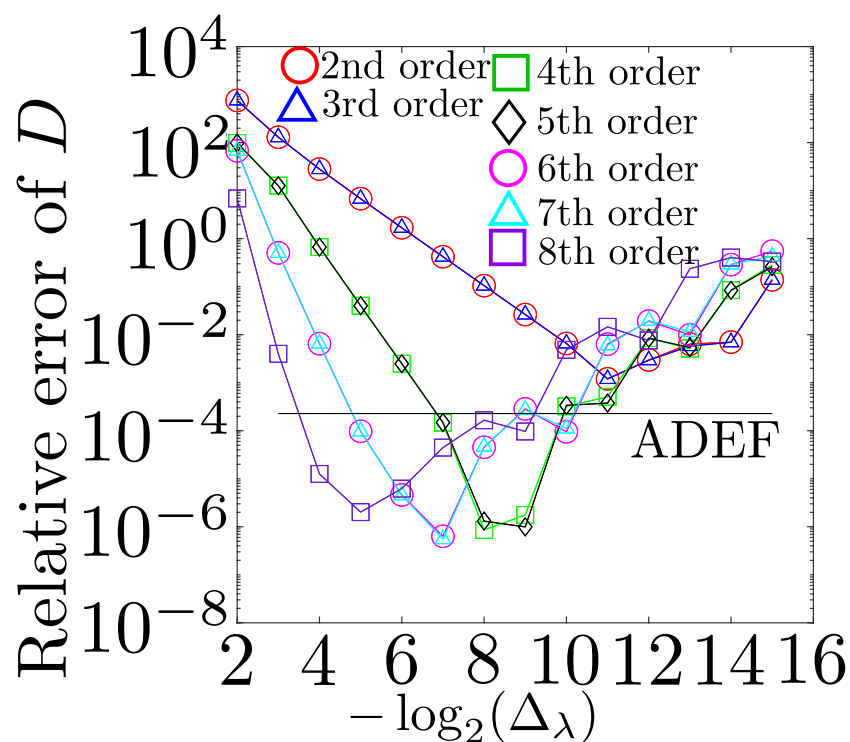


図 2.10 群速度分散 D の相対誤差の波長間隔 Δ_λ 依存性

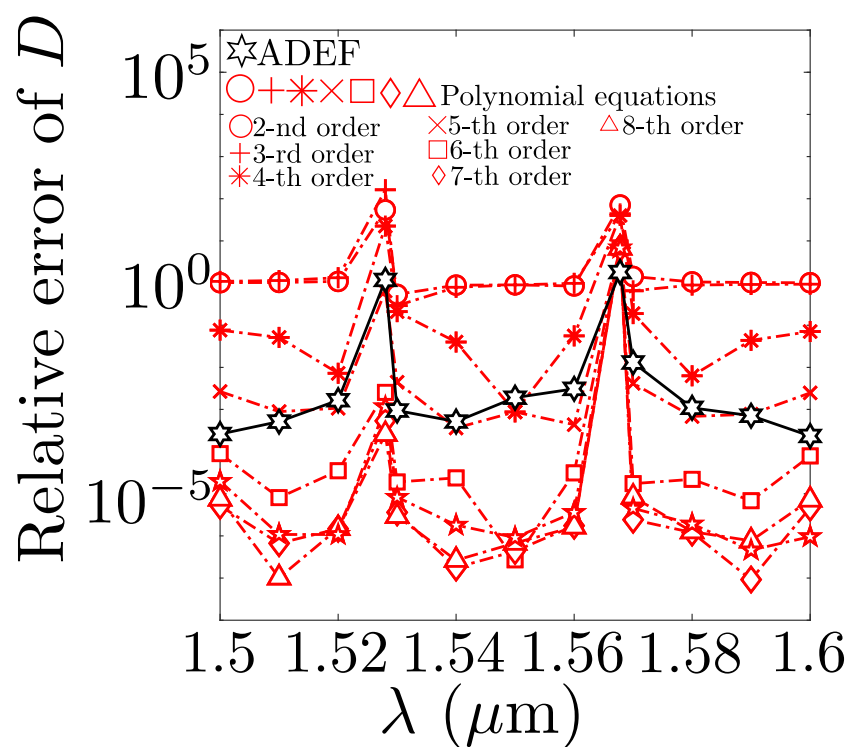
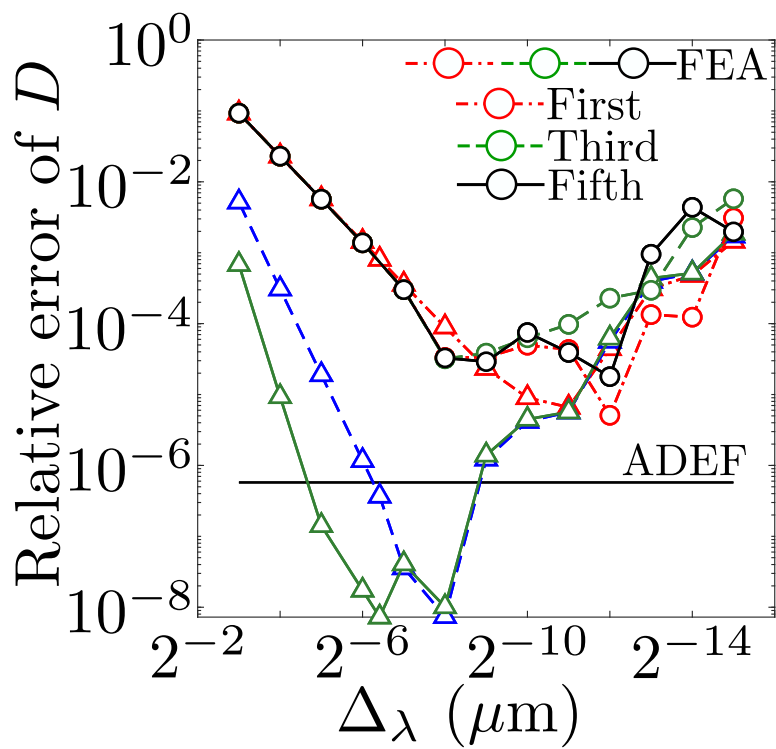
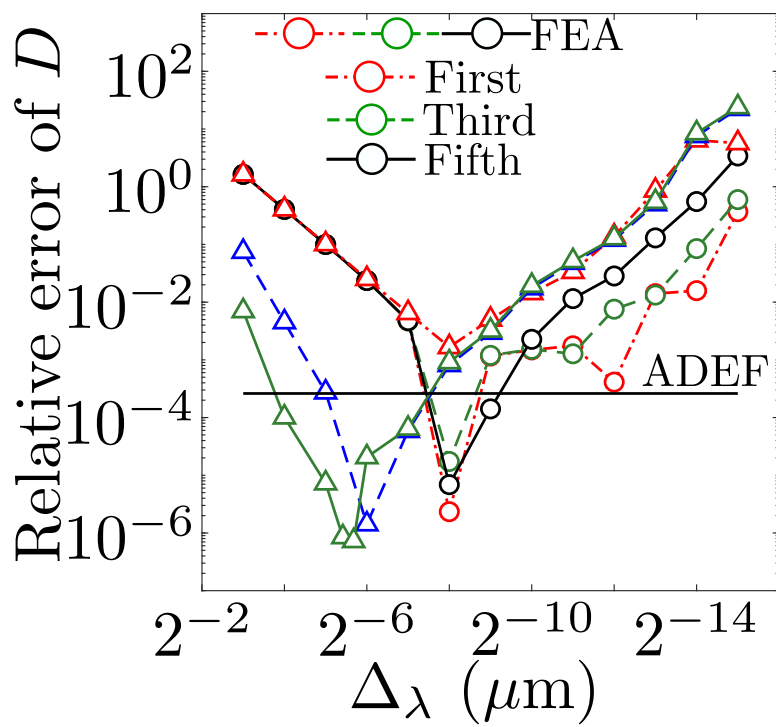


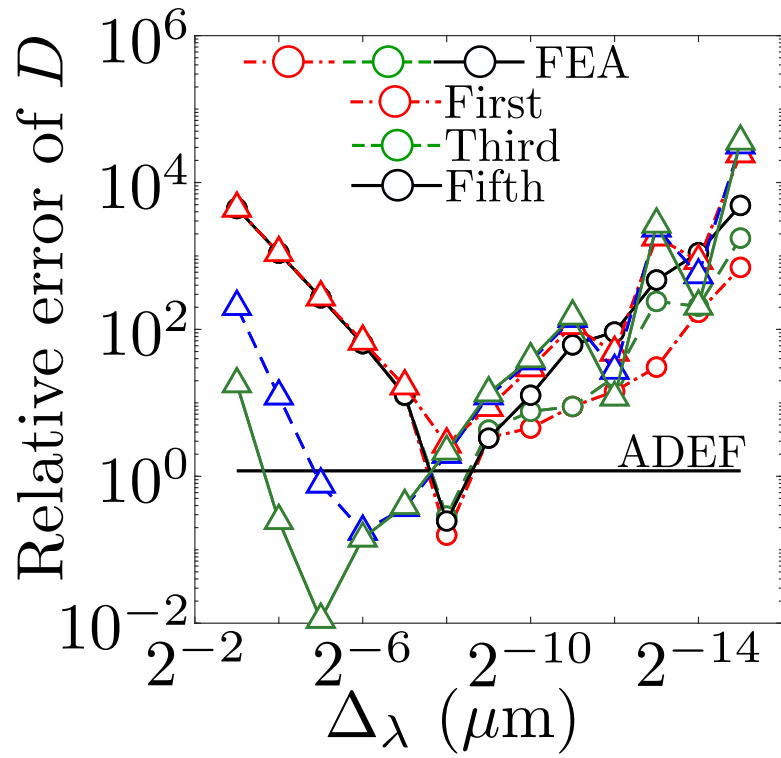
図 2.11 群速度分散 D の波長 λ 依存性



(a)



(b)



(c)

図 2.12 DPA で計算した HE_{11} モードの群速度分散 D の相対誤差の差分間隔 $\Delta\lambda$ 依存性. (a) $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$. (b) $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$. (c) $\lambda = 1.528 \mu\text{m}$. (\circ , \circ , \circ) は FEA の結果を 2 次中央差分で計算した値, (\triangle , \triangle , \triangle) は MM の結果を 2, 4, 6 次の中央差分で計算した値.

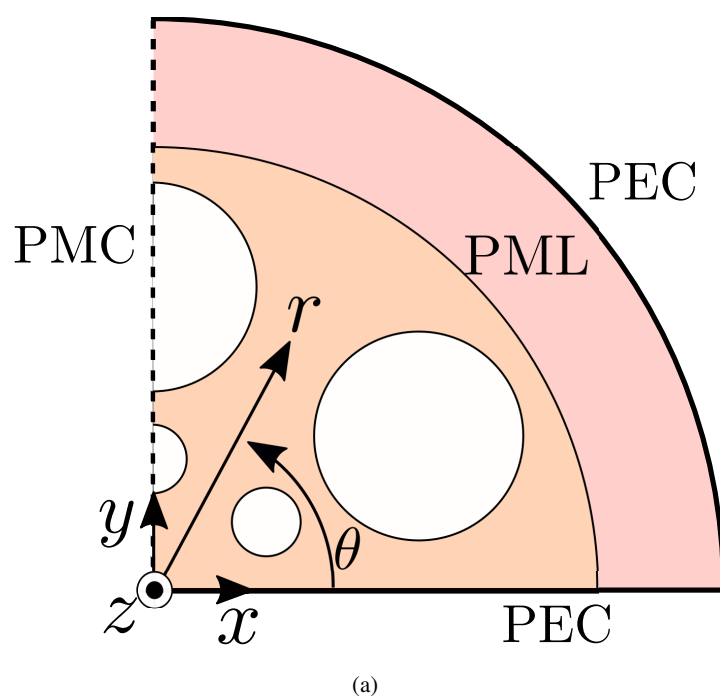
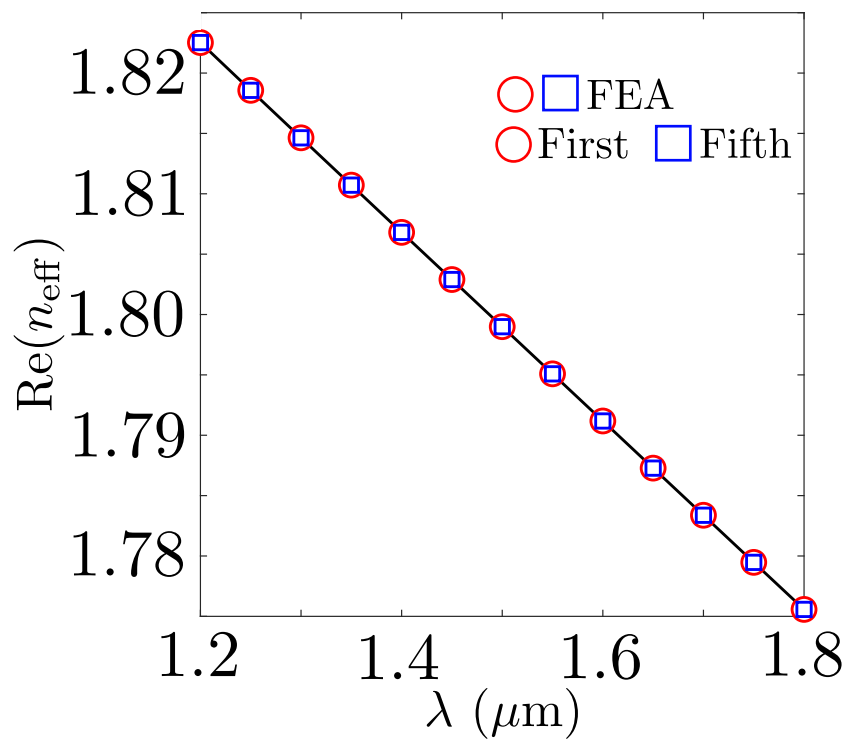


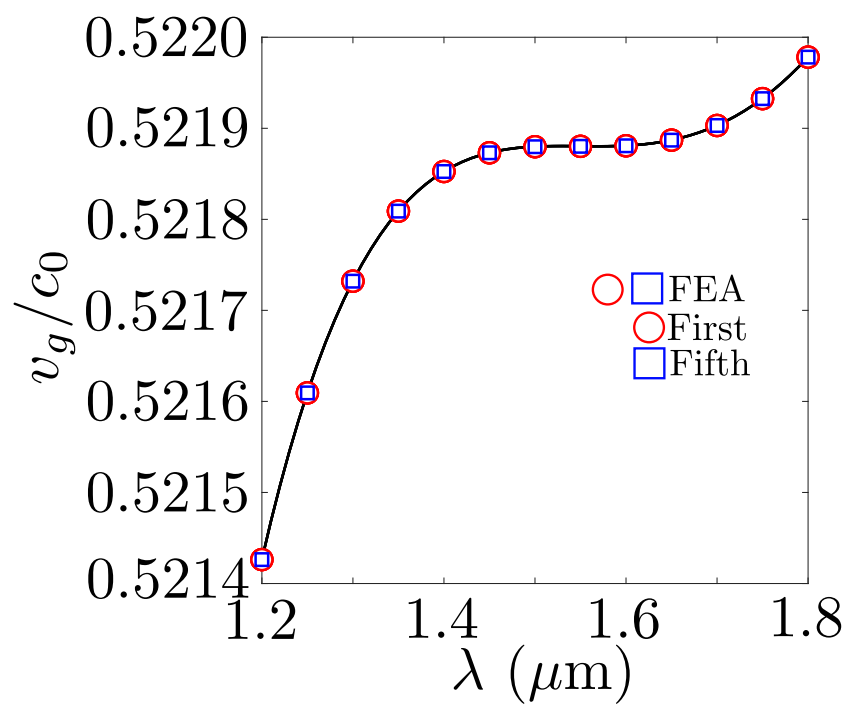
図 2.13 HF の有限要素解析モデル

表 2.7 群速度分散の有効桁の SSM の乱数行列 V 依存性

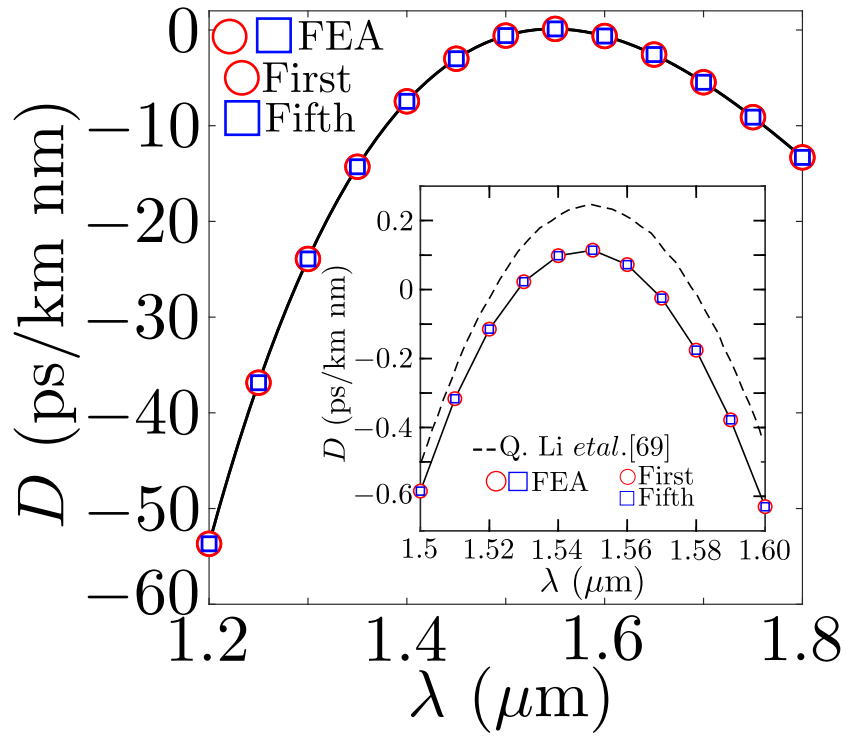
$\lambda (\mu\text{m})$	seed	D (ps/km nm)
1.3	1	−23.92190235698341906890704937854319
	2	−23.92190501269163819015530823471280
	3	−23.92189505961832429962975202230904
	4	−23.92187171170133397850273932625829
	analytic	−23.92191973087413831793270046312161
1.5	1	−0.5845340276161018476226922779985429
	2	−0.5845384297651884888384730273530385
	3	−0.5845263782701447143523725270427936
	4	−0.5844830458851913767714456371218863
	analytic	−0.5845282417707759138717610298091472
1.528	1	0.000275192207577997901700139042910
	2	0.000517912918355036449921287732630
	3	0.0000481010845413042633040148996031962
	4	0.000605610918628628612694827225606
	analytic	0.000189393614435883805330907788203



(a)

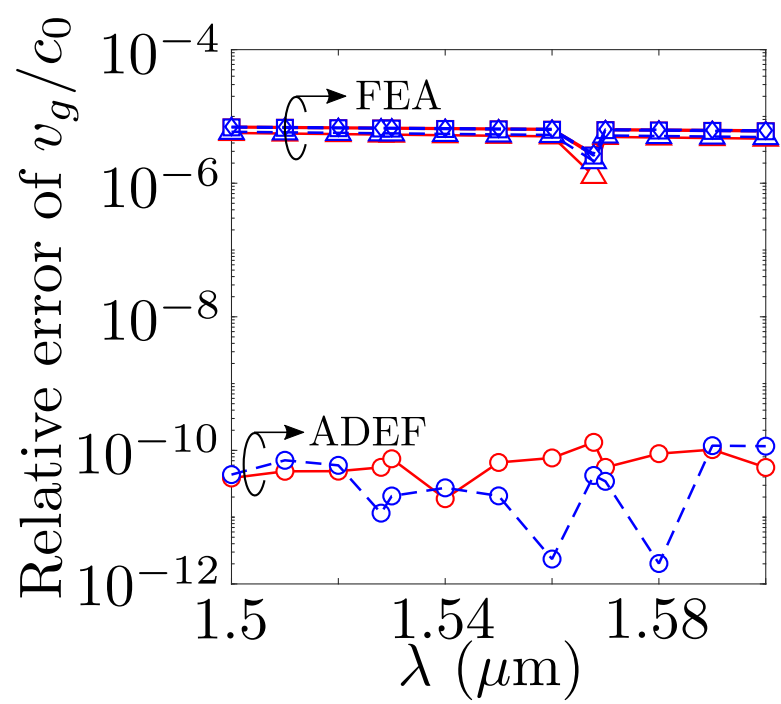


(b)

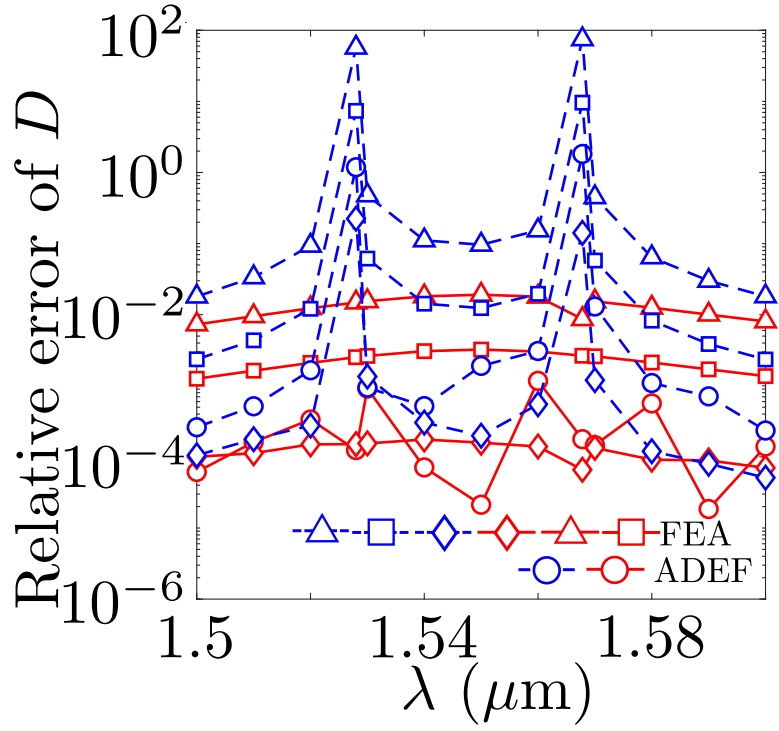


(c)

図 2.14 HE_{11} モードの分散特性の波長 λ 依存性. (a) 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$. (b) 規格化群速度 v_g/c_0 . (c) 群速度分散 D . 実線は MM と ADEF の結果. (\circ , \square) は FEA と 2 次中央差分の結果で, (\circ) は 1 回目, (\square) は 5 回目の refinement mesh.



(a)



(b)

図 2.15 $d_2/\Lambda_1 = 0.1495$ (\circ , \triangle , \square , \diamond) と $d_2/\Lambda_1 = 0.15$ (\circ , \triangle , \square , \diamond) の HF の HE_{11} モードの分散特性の相対誤差の波長 λ 依存性. (a) 規格化群速度 v_g/c_0 . (b) 群速度分散 D . FEA の 3 つの refinement mesh の DOF は, $d_2/\Lambda_1 = 0.1495$ で 9316(\triangle), 23327(\square), 133215(\diamond) であり, $d_2/\Lambda_1 = 0.15$ で 9059(\triangle), 22557(\square), 134348(\diamond) である.

表 2.8 計算時間

model		n_{eff}	v_g/c_0	D
SIF	DPA	0.092 s	0.114 s	0.139 s
	QPA	0.594 s	1.109 s	1.918 s
HFDF	DPA	1.12 s	2.29 s	3.30 s

2.5 むすび

本章では，自動最適設計を目的として，高速高精度な Trefftz 法にも適用可能な光ファイバの分散特性を解析的に微分し算出する ADEF を開発し，自動最適設計に適用可能であることを示した．

1. 分散特性を計算するのに不可欠な微分値の計算は，固有ベクトルや固有ベクトルの微分値を用いず，非縮退，縮退モードにかかわらず複数のモードの微分値を 1 回で計算できる ADEF を用いることで，数値微分や，高次多項式を微分した方法と比べ，高速，高精度に計算できることを，解析解がある SIF と DFF である HF の解析を例に示した．ただし，異なるモードが縮退する付近の波長では計算精度が低下するが，その波長範囲が狭い．また差分間隔等の新たなパラメータを設定する必要はない．
2. 陰関数定理に基づき微分値を算出する方法 (IDTM) は，ADEF と同程度の計算精度であるが，縮退モードが存在する場合，縮退を解かなければ縮退モードの 2 階微分値の計算精度は低く，QPA を用いても改善しないことを示した．
3. 中央差分近似による数値微分や高次多項式は，適切な差分間隔，標本点数，波長範囲を選択しなければならない．計算精度はパラメータの適切な選択を行うと ADEF と比べて高精度に計算できるが，その適切な選択は難しい．また伝搬定数を複数回計算する必要があり，計算時間は ADEF と比べると長い．

3 縮退モードを有する非線形固有値問題のブロック版

Sakurai-Sugiura 法による求解

3.1 まえがき

Holey fiber(HF) の高精度な電磁界解析には、波動方程式の解である波動関数で電磁界を表現する Multipole Method(MM) [32,33,77,78] が適している。しかしながら、MM はファイバ内の電磁界をヘルムホルツ方程式を満足する円柱関数の重ね合わせで表現しているため、最終的に伝搬定数を固有値にした、非線形固有値問題 (Nonlinear eigenvalue problem:NEP) に帰着する。

NEP の解法として、係数行列の行列式の値、もしくは、条件数の逆数の値を関数値とする伝搬定数に関する複素関数の零点探索法を行う方法がある。これは、例えば Newton's method, quasi-Newton method, Downhill simplex method(DSM) で求解できる。零点探索法では、固有値の推定値である初期値を設定しなければならず、予め解分布を知る必要がある。特に、指定した探索領域内に複数の固有値を含むと、求解法は 1 つの解を求めるアルゴリズムなので、異なる初期値で複数回求解を繰り返しても同一の解を得ることがあり、適切な初期値を与える必要がある。また、求解領域内の解の個数は、零点探索アルゴリズムでは求まらない。この 2 つの問題点は、探索する複素関数の伝搬定数に関する詳細な分布を調べることで対処できる。しかしながら、数値計算上僅かに違う解となる縮退固有値を求解することは、関数分布の調査時間が長くなり、現実的ではない。このため、対称条件を課して非縮退固有値として求解する必要がある。

縮退モードが無い、多層導波路の分散曲線は、超越方程式に非ブロック版 Sakurai-Sugiura 法 (SSM) [37–40] を適用して算出でき、SSM によって計算される固有値から、スプリアス解の判別指標として固有値の条件数が有用であることが報告されている [45]。SSM は、初期値を与えずに、求解領域内の複素固有値と複素固有ベクトルを求めることができる NEP の解法である。しかしながら、SSM によって計算される複素固有値から、スプリアス解を取り除くために、SSM の求解領域内の固有値数を求めることは容易ではない。また、Holey fiber(HF) の固有モード解析では、縮退モードが存在するが、非ブロック版 SSM では縮退固有値を解くことできない。

本章では、HF の MM による NEP から固有値である伝搬定数を求める方法として、ブロック版 SSM [39] を採用し、対称条件を課さずに縮退モードを求める。また、スプリアス解の判別指標として、固有値の条件数、残差、NEP の条件数を検討し、固有値の条件数が最適であることを示す。零点探索法である DSM と SSM の計算時間を比較して、SSM の方が計算時間が短く精度良く固有値が求められることを示す。

3.2 基本方程式

図 3.1 に示すような, z 軸方向に無限で一様な HF 中を界の依存性が $\exp(-j\gamma z)$ で伝搬する電磁波の固有モードの伝搬定数 γ を求める問題を考える. HF は, 半径 R_0 で屈折率 n_r の部材中に, 半径 $R_i (i = 1, 2, \dots, N_c)$ で屈折率 n_i の空孔が間隔 Λ で六角形上に配置されており, 半径 R_0 の領域を屈折率 n_s のジャケットが被っている構造を考える. ここで, 空孔が配置されている六角形の層数を N_R , 全空孔数を N_c とすると, $N_c = 3N_R(N_R + 1)$ となる.

角周波数 ω , 時間 t を用いて, 電磁界の時間依存項を $\exp(j\omega t)$ として, 電界ベクトル \mathbf{E} , 磁界ベクトル \mathbf{H} を,

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \mathbf{E}(r, \theta) \exp\{j(\omega t - \gamma z)\}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, z, t) = \mathbf{H}(r, \theta) \exp\{j(\omega t - \gamma z)\}, \quad (3.2)$$

とした. 電界, 磁界の縦方向成分 E_z , H_z は円柱座標系 (r, θ, z) の波動方程式,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \kappa^2 \right] \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

を満たすように, 原点を i 番目の空孔の中心とした局所円柱座標系 (r_i, θ_i, z) で Fourier-Bessel 級

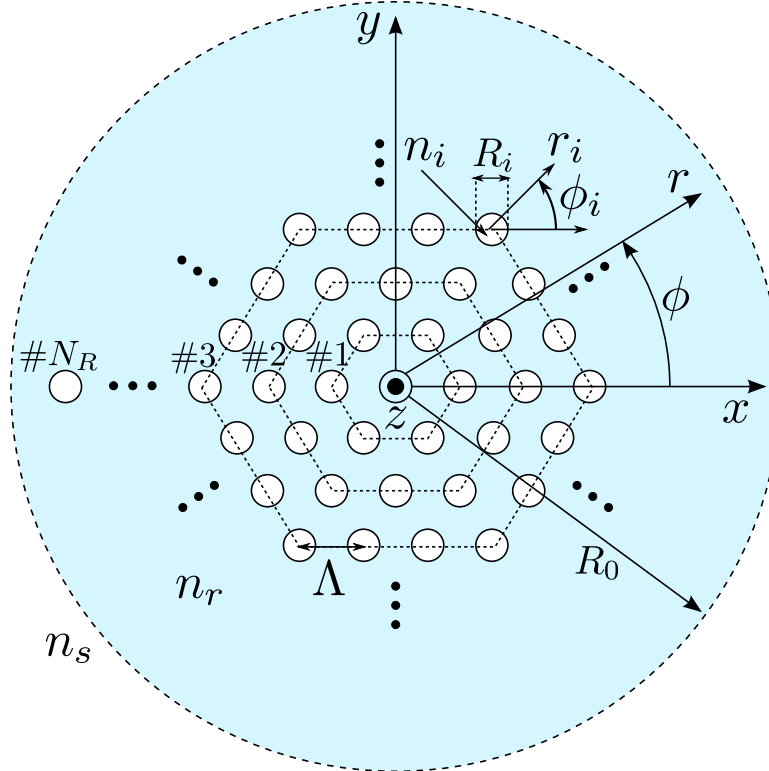


図 3.1 HF の断面構造

数展開すると,

$$E_z = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \{A_{m,i}J_m(\kappa r_i) + B_{m,i}H_m^{(2)}(\kappa r_i)\} \exp\{(jm\theta_i)\}, \quad (3.4)$$

$$H_z = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \{C_{m,i}J_m(\kappa r_i) + D_{m,i}H_m^{(2)}(\kappa r_i)\} \exp\{(jm\theta_i)\}, \quad (3.5)$$

である. ここで, J_m は m 次の第 1 種ベッセル関数, $H_m^{(2)}$ は m 次の第 2 種ハンケル関数, κ は断面内波数, 部材中では $\kappa^2 = (k_0^2 n_r^2 - \gamma^2)$, 空孔中では $\kappa^2 = (k_0^2 n_i^2 - \gamma^2)$, k_0 は真空中の波数, M_c は Fourier-Bessel 級数の打ち切り次数である.

MM の定式化は, 4 章で述べる. MM は, 固有値 γ , 固有ベクトル B の非線形固有値問題 (NEP),

$$T(\gamma)B = \{0\} \quad (3.6)$$

に帰着する. ここで, $T(\gamma) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は γ の解析関数, 固有ベクトル $B \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ は $B_{m,i}$ と $D_{m,i}$ ($i = 1, 2, \dots, N_c$), $N = 2N_c(2M_c + 1)$ で構成されるベクトル, $\{0\}$ は零ベクトルである.

3.3 Sakurai-Sugiura 法

NEP, (3.6) に, ブロック版 SSM を適用すると,

$$(H_M^< - \gamma H_M)w = \{0\} \quad (3.7)$$

を得る. ここで, $H_M^< \in \mathbb{C}^{(M \times L) \times (M \times L)}$ はシフトハンケル行列, $H_M \in \mathbb{C}^{(M \times L) \times (M \times L)}$ はハンケル行列であり, それぞれ,

$$H_M^< = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_M \\ \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_M & \mu_{M+1} & \dots & \mu_{2M-1} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$H_M = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{M-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{M-1} & \mu_M & \dots & \mu_{2M-2} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mu_k = \frac{1}{j2\pi} \int_{\Gamma} \gamma^k V^H T(\gamma)^{-1} V d\gamma. \quad (3.10)$$

ここに, $\Gamma \in \mathbb{C}$ は正の向きを持つ Jordan 曲線, $V \in \mathbb{C}^{N \times L}$ は各列ベクトルが互いに独立な任意のベクトル, 上添字 H は行列のエルミート共役を表す. (3.6) の固有値 γ_l に対応する固有ベクトル B_l は,

$$B_l = [s_0 s_1 \dots s_{m-1}] w_l \quad (3.11)$$

で与えられる。ここで、 s_k は、

$$s_k = \frac{1}{j2\pi} \int_{\Gamma} \gamma^k T(\gamma)^{-1} V d\gamma \quad (3.12)$$

である。 Γ を複素 γ 平面上の半径 ρ 、中心 o の円として、(3.10)、(3.12) を台形則で数値積分すると、

$$\mu_k \simeq \hat{\mu}_k = \frac{\rho}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} \left(\frac{c_n - o}{\rho} \right)^{k+1} f(c_n), \quad (3.13)$$

$$s_k \simeq \hat{s}_k = \frac{\rho}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} \left(\frac{c_n - o}{\rho} \right)^{k+1} T(c_n)^{-1} V \quad (3.14)$$

となる。ここに、 $c_n = o + \rho \exp\{j2\pi(n+1/2)/N_s\}$ であり、アクセント記号 $\hat{}$ は、近似値を表す。(3.13) の近似値を用いると、(3.7) は、

$$(\hat{H}_M^< - \xi \hat{H}_M) w = \{0\}, \quad (3.15)$$

となる。NEP の Γ 内に含まれる固有値 γ_l は、(3.15) の固有値 ξ_l から、 $\gamma_l = o + \rho \xi_l$ と求まる。求解領域 Γ 内の固有値数 N_p を事前に知ることは困難であるから、推定した固有値数を N_{pi} として、 $N_{pi} \geq N_p$ とする。SSM のパラメータである M, L への制約は、 N_{pi} を用いて次の通りである。 $M \times L > N_{pi}$, $L >$ (縮退固有値数)。 (3.15) から得られる固有値数は $(M \times L)$ 個なので、必ず $(M \times L - N_{pi})$ 個のスプリアス解が含まれる。もし、 $(M \times L) = N_p = N_{pi}$ であれば、スプリアス解は含まれない。

文献 [37–40] では、 \hat{H}_M の rank を N_p とする方法が示されている。しかしながら、rank の計算には、閾値を指定するが、この決定が容易ではない。そこで、 $N_{pi} > N_p$ となるように推定し、スプリアス解を判別指標で決定する。(3.15) は、QZ 分解を用いて、

$$\hat{\xi}_l = \frac{S_{ll}}{P_{ll}}, \quad l = 1, 2, \dots, N_p \quad (3.16)$$

と求まる。ここで、 S_{ll} と P_{ll} は一般化 Schur 分解 $\hat{H}_M = QPZ^H$, $\hat{H}_M^< = QSZ^H$ による上三角行列 S , P の対角要素であり、 Q, Z はユニタリ行列である。固有値 $\hat{\xi}_l$ の固有値の条件数 C_l は、

$$C_l = \frac{\|\hat{v}_l\|_2 \|\hat{w}_l\|_2}{\sqrt{|S_{ll}|^2 + |P_{ll}|^2}} \quad (3.17)$$

である。ここで、 $\|\cdot\|_2$ はベクトルの 2 ノルム、 \hat{v}_l と \hat{w}_l は l 番目の固有値 $\hat{\xi}_l$ に対応した右、左固有ベクトルである。

3.4 数値計算例

図 3.1 に示すような、屈折率 $n_i = 1$ の空孔 $N_c = 6(N_R = 1)$ 個配置されている HF を考える．それぞれ、空孔の直径 $R_i = d$ ，空孔間距離 $\Lambda = 1.35d$ ，部材の屈折率 $n_r = 1.45$ ，部材の半径 R_0 は十分大きいものとして $R_0 \approx \infty$ とし，規格化波数 $k_0d = \pi/0.145$ とし，Fourier-Bessel 級数の打ち切り次数 $M_c = 5$ とした [32]．図 3.2 に，SSM の求解領域と SSM により計算した固有値分布を示す．Branch point は $\kappa \approx 0$ となる点 $(1.45, 0)$ である．点線が SSM の求解領域円 Γ で，規格化半径 ρ/k_0 は，大きい円が $\rho/k_0 = 0.01$ ，小さい円が $\rho/k_0 = 0.001$ である．大きい円，小さい円内には，それぞれ，12，4 個の解が存在する．表 3.1，表 3.2，表 3.4(a)，表 3.6 では 0.001，表 3.4(b)，表 3.3 では 0.01 である．計算は，倍精度演算の C++ で行った．

3.4.1 ブロック版 SSM による縮退モードの求解

表 3.1 にブロック版と非ブロック版 SSM により求めた実効屈折率 $n_{\text{eff}} = \gamma_l/k_0 (l = 1, 2, \dots, M \times L)$ の値を示す． $o/k_0 = 1.4385$ ， $N_s = 256$ とした．縮退モードには，上添字 a, b を用いて， HE_{21}^a ， HE_{21}^b とした．(b) の $M = 2$ ， $L = 1$ で固有値が求解できていないのは， $M \times L = 2 < N_p = 4$ となるからである．また，非ブロック版 SSM は縮退度が 2 の HE_{21} モードの片方の固有値のみ求解している．表 3.2 にブロック版 SSM による固有モードの n_{eff} の結果と文献値 [32] を示す． $N_s = 256$ ， $L = 4$ ， $M = 2$ とし， HE_{11} モードでは $o/k_0 = 1.4455$ ， TE_{01} ， HE_{21} ， TM_{01} モードでは $\rho/k_0 = 1.4385$ ， HE_{31} と EH_{11} は $o/k_0 = 1.43$ とした．ブロック版 SSM の結果は，Broyden method [32] の結果と， HE_{31}' は 3 桁，他の固有モードは 7~10 桁一致している． HE_{11} モードの他に， HE_{21} モード， EH_{11} モードの 2 重縮退固有値も求解できる．

表 3.3 は複数の縮退固有値が求解領域内に分布している場合のブロック版 SSM の結果をまとめたものである．ここで， $\rho/k_0 = 0.01$ ， $o/k_0 = 1.436$ ， $M = 2$ ， $N_s = 256$ ，求解領域内の縮退固有値はすべて縮退度が 2 であるため $L \geq 2$ の制約があり $L = 16$ とした． HE_{11} ， HE_{21} ， EH_{11} モード 3 つの 2 重縮退固有値が求解領域内に含まれ，表 3.2 と比べ， HE_{12} モードを除いて 10 桁一致し，Broyden method [32] の結果と 7~10 桁一致している．

表 3.2 の HE_{11} モードの $|E_z|$ ， $|H_z|$ ， $|S_z|$ の界分布を図 3.3 に示す．図 3.4 に有限要素解析による HE_{11} モードの $|E_z|$ ， $|H_z|$ ($-2 \leq x/d, y/d \leq 2$) の界分布を示す．図 3.3 と図 3.4 の $|E_z|$ ， $|H_z|$ の界分布は一致している．

以上から，ブロック版 SSM により縮退した固有値と固有ベクトルを求解できることを確認した．

3.4.2 新たな判別指標 C_l の検討

固有値の条件数 C_l ，係数行列 $T(\gamma)$ の 2 ノルムの条件数の逆数 $1/\text{cond}([T(\gamma)])$ ，残差 $\|T(\gamma)B_l\|_2$ について考える．残差 $\|T(\gamma)B_l\|_2$ は， z 軸方向に $-4 \leq x/d, y/d \leq 4$ の範囲を伝搬する電力で固有ベクトル B_l を規格化した．表 3.1 の固有値の条件数 C_l ， $1/\text{cond}([T(\gamma)])$ ，残差 $\|T(\gamma)B_l\|_2$ の値はともに，スプリアス解では大きくなっており，得られた解の中からスプリアス解と固有モードの固

有値とを 2 分する閾値は容易に設定できると考えられる．表 3.2, 3.3 に示すそれぞれの判別指標も固有モードの値と比べて，スプリアス解の値が大きくなっている．表 3.3 では，判別指標の値が固有モードと同程度の値となる固有値が存在するが，求解領域外であるため除外できる．

以上から，それぞれの判別指標によりスプリアス解を判別できることを確認した．条件数の逆数 $1/\text{cond}([T(\gamma)])$ は条件数を計算するため計算時間が長くなる．残差 $\|T(\gamma)B_l\|_2$ の計算は，搬送波電力で固有ベクトルを規格化するので，搬送波電力を計算するため電磁界分布の計算が必要となり，計算時間が長くなる．固有値の条件数 C_l の計算は，新たに計算するのが左固有ベクトル $\{\hat{w}_l\}$ だけなので，他の 2 つの判別指標と比べて計算が容易である．このため，固有値の条件数 C_l を判別指標とする．

3.4.3 ブロック版 SSM の SSM パラメータ依存性

表 3.4 は，HE₂₁ モードの実効屈折率 n_{eff}^a と実効屈折率差 $\|\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}\|$, $\|\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}\|$ の標本点数 N_s をまとめたものである．ここに， $M=2$ とし，(a) は $\rho/k_0=0.001$ ，(b) は $\rho/k_0=0.01$ であり，(-) は HE₂₁ モードの界分布が得られなかったことを示している．(a) の実効屈折率は実部 $\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a\}$ と虚部 $\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a\}$ とともに， $L=2$ では $N_s \geq 16$ で小数点以下 11 桁， $L=4,8$ では $N_s \geq 16$ で小数点以下 14 桁一致している．実効屈折率差 $\|\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}\|$, $\|\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}\|$ は， $N_s \geq 16$ で 10^{-11} 以下である．加えて， L を縮退固有値数である 2 より大きくすると，実効屈折率差は実部，虚部ともに 10^{-14} 以下と非常に小さい．まとめると， $\rho/k_0=0.001$ のとき $N_s \geq 16$ で縮退固有値を精度よく求解できることが確認できる．(b) の実効屈折率では実部と虚部ともに， $L=8$ で $N_s \geq 512$ ， $L=12$ で $N_s \geq 256$ ， $L=16,20$ で $N_s \geq 128$ で小数点以下 13 桁一致する． $L=8$ で $N_s \geq 512$ ， $L=12$ で $N_s \geq 256$ ， $L=16,20$ で $N_s \geq 128$ で実効屈折率差は， 10^{-13} 以下となる．

以上まとめると，精度よく縮退固有値を求解するには，小さい積分路より大きい積分路の方が N_s を大きくする必要がある．しかしながら， L を大きくとることで，必要な N_s を低減できる．

3.4.4 ブロック版 SSM の計算時間

表 3.5 はブロック版 SSM の $[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$ と条件数 $\text{cond}([T(\gamma)])$ の計算時間をまとめたものである．ここに， $L=4$ ， $M=2$ ， $M_c=5,10$ とした．計測に使用した計算機は，Intel Core i7-3820 3.6GHz，手記憶容量 16GB である． $[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$ と条件数 $\text{cond}([T(\gamma)])$ の計算時間がおおよそ等しい．Downhill simplex method(DSM) は，伝搬定数を計算するためにシンプレックスを N_u 回更新する場合，初期シンプレックスの 3 点分を合わせて， $3+N_u$ 回， $\text{cond}([T(\gamma)])$ を計算する．また，1 回の求解で 1 つの解を計算する．他方，ブロック版 SSM は 1 回の求解で N_s 回 $[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$ を計算し，求解領域 Γ 内の全ての固有値 N_p 個を求めることができる．例えば，表 3.2 は， $N_p=2$ のとき $N_s=16$ であり， $[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$ を 16 回計算している．また，表 3.3 は $N_p=12$ で $N_s=256$ であるので， $[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$ を 256 回計算している． N_s と N_u の関係は $N_u = N_s/N_p - 3$ と現わせる．

SSM と同じ計算回数で DSM を計算することを考える．例えば， $N_p=2$ の場合，SSM では $N_s=16$ であった． $N_u=5$ とすれば DSM の $\text{cond}([T(\gamma)])$ の計算回数は 8 回である．しかしなが

ら、これは1個の固有値を求めるための計算回数で、 $N_p = 2$ より、2つの固有値を求めるためには16回である。また、表3.3の $N_p = 12$ の場合、SSMでは $N_s = 256$ 、DSMでは $N_u = 18$ とすると $\text{cond}([T(\gamma)])$ を252回計算することになる。以上のような少ないシンプレックスの更新回数 N_u での求解は難しい。また、DSMは適切な初期値を設定しなければ難しく、適切な初期設定を行うためには、あらかじめ固有値分布を知る必要がある。したがって、SSMはDSMより高速に計算できる。

3.4.5 非漏洩モードと漏洩モードの判別指標

表3.6は $N_R = 2, 3, 4, 5$ における TE_{01} , HE_{21} , TM_{01} モードの実効屈折率 n_{eff} と3つの判別指標をまとめたものである。ここで、SSMのパラメータは表3.2と同じとし、 $L \times M = 8$ なので4つのスプリアス解がある。判別指標が、それぞれ、 $C_l > 10^{13}$, $1/\text{cond}([T(\gamma)]) > 10^{-1}$, $\| [T(\gamma)] \{B\}_l \|_2 > 10^3$ であったので除外している。 $N_R \geq 3$ では n_{eff} の虚部が 10^{-14} 以下と今までの計算結果と比較して小さな値となっている。 $N_R \geq 3$ で n_{eff} の実部の値も15桁一致していることから、 $N_R = 3 \approx \infty$ とできると考えられる。 $N_R \leq 2$ の漏洩モードと $N_R \geq 3$ 非漏洩モードともに求解でき、3つの判別指標も漏洩、非漏洩モードの区別なく有効である。

3.5 むすび

ブロック版 SSM を MM による非線形固有値問題に適用し，縮退モードと非縮退モードの伝搬定数と界分布を正確に求められることを確認し，判別指標を適用して混入するスプリアス解を除去できることを示した．判別指標は，固有値の条件数とし，固有値の条件数の方が短時間で容易に計算できることを確認した．また非線形固有値問題の反復解法である DSM と計算時間を比較して，SSM の方が速く計算できることを示した．

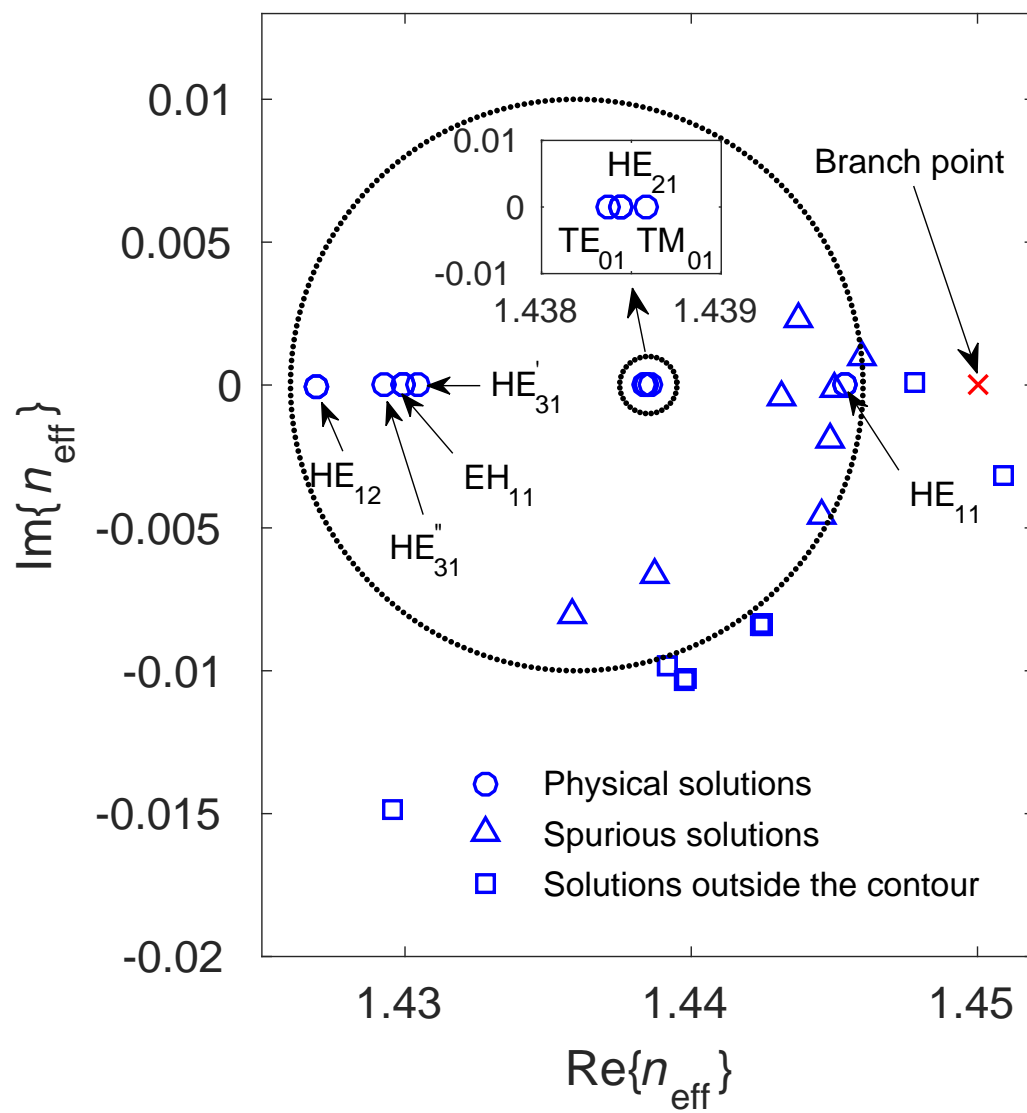


図 3.2 複素実効屈折率平面上的 SSM により求解した固有値の分布.

表 3.1 SSM による HF の実効屈折率 n_{eff} と 3 つの判別指標 (a) ブロック版 SSM. (b) 非ブロック版 SSM.

(a) Block version of the SSM					
L	Mode	n_{eff}	C_l	$1/\text{cond}([T(\gamma)])$	$\ [T(\gamma)]\{B\}_l\ _2$
2	TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	7.1×10^3	3.7×10^{-12}	9.1×10^{-7}
	HE ₂₁ ^a	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.3×10^4	1.1×10^{-13}	1.3×10^{-6}
	HE ₂₁ ^b	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.0×10^4	2.4×10^{-13}	1.5×10^{-6}
	TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	5.3×10^3	4.7×10^{-13}	1.4×10^{-6}
4	TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	1.2×10^3	3.7×10^{-12}	1.3×10^{-6}
	HE ₂₁ ^a	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.1×10^3	2.4×10^{-13}	1.3×10^{-6}
	HE ₂₁ ^b	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	3.1×10^3	2.4×10^{-13}	1.6×10^{-6}
	TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	2.7×10^3	4.7×10^{-13}	4.6×10^{-7}
	Spurious	$1.438537378 + j6.722 \times 10^{-4}$	1.0×10^{16}	1.1×10^{-2}	6.0×10^2
	Spurious	$1.437994323 + j3.036 \times 10^{-4}$	6.9×10^{15}	8.1×10^{-3}	6.8×10^2
	Spurious	$1.437907386 - j3.451 \times 10^{-5}$	3.1×10^{15}	7.5×10^{-3}	7.1×10^2
	Spurious	$1.437534098 - j4.702 \times 10^{-5}$	1.2×10^{16}	1.4×10^{-2}	1.4×10^3
8	TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	2.3×10^3	3.7×10^{-12}	9.9×10^{-7}
	HE ₂₁ ^a	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.4×10^3	2.4×10^{-13}	9.2×10^{-7}
	HE ₂₁ ^b	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	2.4×10^4	2.4×10^{-13}	1.1×10^{-6}
	TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	4.1×10^3	3.0×10^{-13}	8.3×10^{-7}
	Spurious	$1.438691353 + j1.416 \times 10^{-4}$	6.9×10^{15}	3.4×10^{-3}	5.6×10^2
	Spurious	$1.438659271 + j5.263 \times 10^{-4}$	1.5×10^{16}	9.6×10^{-3}	6.2×10^2
	Spurious	$1.438580049 - j3.627 \times 10^{-4}$	9.2×10^{15}	6.1×10^{-3}	5.4×10^2
	Spurious	$1.438554973 - j4.667 \times 10^{-4}$	2.1×10^{16}	7.1×10^{-3}	4.5×10^2
	Spurious	$1.438478454 + j2.848 \times 10^{-4}$	5.5×10^{15}	4.9×10^{-3}	5.0×10^2
	Spurious	$1.438469468 + j4.715 \times 10^{-4}$	1.9×10^{16}	7.9×10^{-3}	5.4×10^2
	Spurious	$1.438460837 - j4.505 \times 10^{-4}$	8.8×10^{15}	6.6×10^{-3}	6.1×10^2
	Spurious	$1.438365354 - j9.702 \times 10^{-4}$	1.6×10^{16}	1.3×10^{-2}	1.2×10^3
	Spurious	$1.438354136 + j5.145 \times 10^{-4}$	9.0×10^{15}	8.5×10^{-3}	5.6×10^2
	Spurious	$1.438302691 - j3.081 \times 10^{-4}$	8.3×10^{15}	4.7×10^{-3}	5.5×10^2
	Spurious	$1.438013179 + j2.881 \times 10^{-5}$	3.7×10^{15}	5.7×10^{-3}	6.3×10^2
	†	$1.438515844 + j1.212 \times 10^{-3}$	3.2×10^{16}	2.1×10^{-2}	6.2×10^2

The symbol “†” in the second column denotes a solution outside Γ .

(b) Non Block version of the SSM

M	Mode	n_{eff}	C_l	$1/\text{cond}([T(\mathcal{N})])$	$ [T(\mathcal{N})]\{B\}_l _2$
2	Spurious	$1.438582217 - j1.480 \times 10^{-5}$	3.1×10^1	2.9×10^{-4}	1.4×10^2
	Spurious	$1.438393458 - j9.422 \times 10^{-6}$	1.7×10^1	4.3×10^{-4}	6.2×10^1
4	TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	2.2×10^2	3.4×10^{-12}	2.1×10^{-6}
	HE ₂₁	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	4.5×10^2	2.6×10^{-11}	3.9×10^{-6}
	TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	4.6×10^2	1.0×10^{-11}	1.9×10^{-6}
	Spurious	$1.443544588 - j6.712 \times 10^{-3}$	1.5×10^{13}	2.3×10^{-3}	2.1×10^3
6	TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	6.9×10^2	1.1×10^{-11}	5.3×10^{-6}
	HE ₂₁	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.2×10^3	7.0×10^{-11}	9.6×10^{-6}
	TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	1.5×10^3	2.8×10^{-11}	4.6×10^{-6}
	Spurious	$1.439487809 + j1.043 \times 10^{-4}$	9.4×10^{12}	1.6×10^{-2}	1.8×10^3
	Spurious	$1.437665882 + j8.031 \times 10^{-5}$	6.0×10^{12}	1.2×10^{-2}	1.3×10^3
	†	$1.441229781 - j2.395 \times 10^{-3}$	4.2×10^{13}	2.0×10^{-2}	3.8×10^3

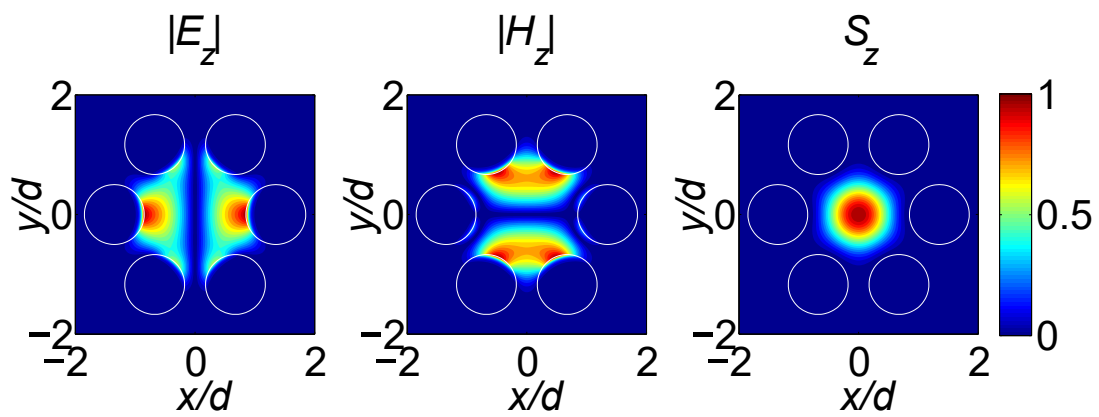
The symbol “†” in the second column denotes a solution outside Γ .

表 3.2 ブロック版 SSM と文献値 [32] の実効屈折率 n_{eff}

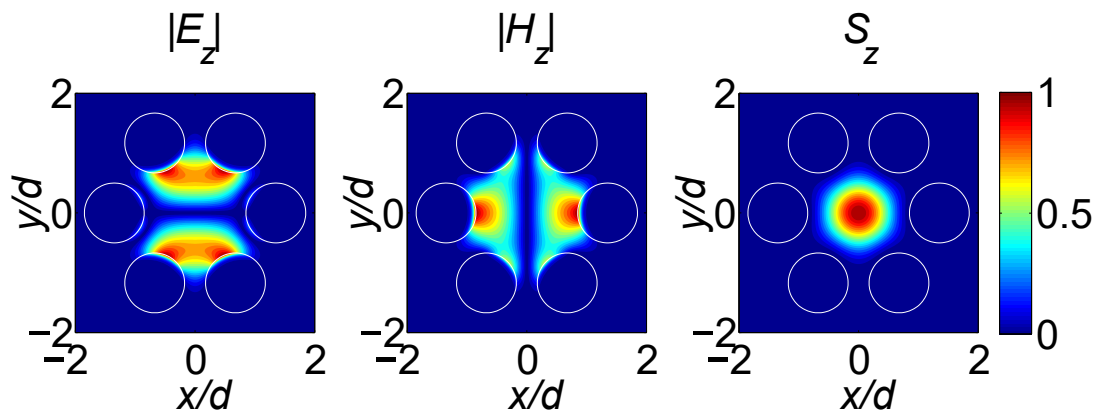
Mode	SSM				Broyden method [32]
	n_{eff}	C_l	$1/\text{cond}([T(\gamma)])$	$\ [T(\gamma)]\{B\}_l\ _2$	n_{eff}
HE ₁₁ ^a	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	9.1×10^2	9.7×10^{-12}	1.5×10^{-6}	$1.445395345 - j3.15 \times 10^{-8}$
HE ₁₁ ^b	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	1.6×10^3	9.7×10^{-12}	1.7×10^{-6}	
Spurious	$1.446353130 + j8.487 \times 10^{-5}$	2.9×10^{15}	1.1×10^{-3}	6.8×10^1	
Spurious	$1.445560987 + j7.462 \times 10^{-4}$	9.7×10^{15}	3.0×10^{-3}	1.2×10^2	
Spurious	$1.445511293 - j5.822 \times 10^{-4}$	7.8×10^{15}	3.0×10^{-3}	1.4×10^2	
Spurious	$1.444701966 + j3.365 \times 10^{-4}$	7.0×10^{15}	5.8×10^{-3}	1.3×10^2	
†	$1.446463306 - j3.839 \times 10^{-4}$	3.6×10^{15}	1.0×10^{-3}	9.8×10^1	
†	$1.447523217 - j2.904 \times 10^{-4}$	8.3×10^{15}	1.6×10^{-4}	4.3×10^1	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$
TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	1.2×10^3	3.7×10^{-12}	1.3×10^{-6}	
HE ₂₁ ^a	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.1×10^3	2.4×10^{-13}	1.3×10^{-6}	
HE ₂₁ ^b	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	3.1×10^3	2.4×10^{-13}	1.6×10^{-6}	
TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	2.7×10^3	4.7×10^{-13}	4.6×10^{-7}	
Spurious	$1.438537378 + j6.722 \times 10^{-4}$	1.0×10^{16}	1.1×10^{-2}	6.0×10^2	
Spurious	$1.437994323 + j3.036 \times 10^{-4}$	6.9×10^{15}	8.1×10^{-3}	6.8×10^2	
Spurious	$1.437907386 - j3.451 \times 10^{-5}$	3.1×10^{15}	7.5×10^{-3}	7.1×10^2	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$
Spurious	$1.437534098 - j4.702 \times 10^{-5}$	1.2×10^{16}	1.4×10^{-2}	1.4×10^3	
HE ₃₁ ^c	$1.430414041 - j2.218 \times 10^{-5}$	1.1×10^3	3.2×10^{-14}	3.1×10^{-6}	
EH ₁₁ ^a	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	5.5×10^3	7.5×10^{-14}	2.0×10^{-6}	
EH ₁₁ ^b	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	1.5×10^3	7.5×10^{-14}	1.2×10^{-6}	
HE ₃₁ ^c	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$	7.1×10^2	3.0×10^{-14}	2.0×10^{-6}	
Spurious	$1.430076391 + j4.050 \times 10^{-4}$	4.2×10^{15}	1.1×10^{-2}	2.3×10^3	
Spurious	$1.429947935 - j5.160 \times 10^{-5}$	5.6×10^{14}	9.8×10^{-4}	1.7×10^2	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$
†	$1.429061978 - j1.348 \times 10^{-3}$	1.3×10^{16}	2.4×10^{-2}	3.1×10^3	
†	$1.430428166 + j1.461 \times 10^{-3}$	1.6×10^{16}	4.1×10^{-2}	2.7×10^3	

The symbol “†” in the first column denotes a solution outside Γ in the SSM.

The values of the Broyden method in this table are the complex conjugates of the values reported in Ref. [32] because the field dependence in (3.1), (3.2), $\exp\{j(\omega t - \gamma z)\}$, is assumed as a conjugate one, $\exp\{-j(\omega t - \gamma z)\}$.



(a)



(b)

図 3.3 ブロック版 SSM による固有ベクトルから描画した HE_{11} モードの z 成分の電界 $|E_z|$ と磁界 $|H_z|$, 電力密度分布 S_z (a) HE_{11}^a モード, (b) HE_{11}^b モード

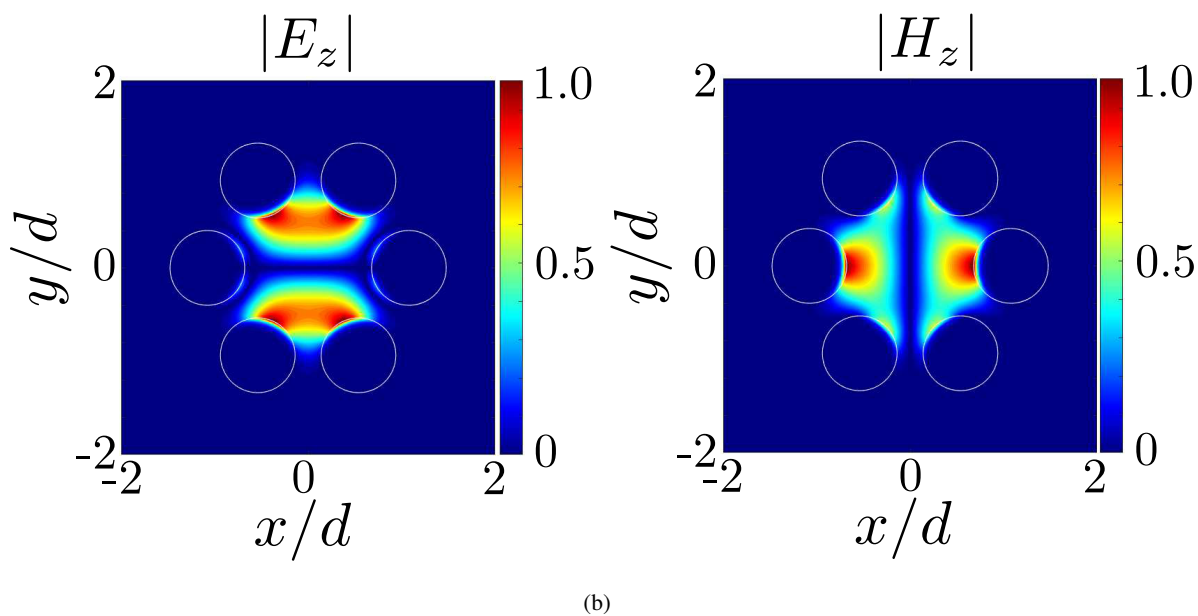
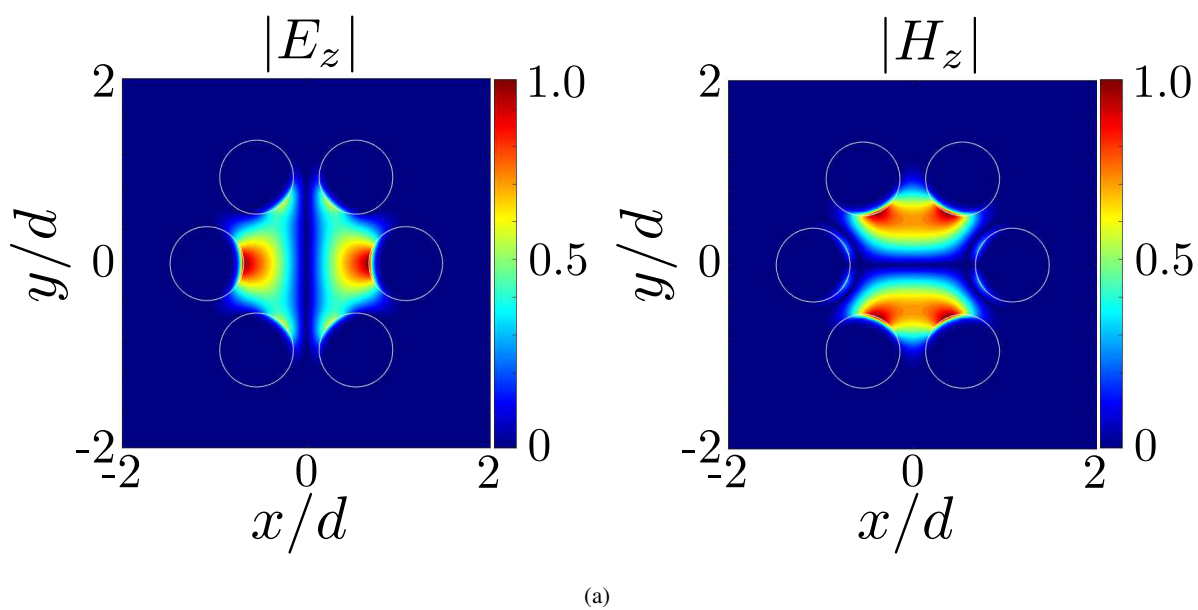


図 3.4 有限要素解析による固有ベクトルから描画した HE_{11} モードの z 成分の電界 $|E_z|$ と磁界 $|H_z|$ (a) HE_{11}^a モード, (b) HE_{11}^b モード

表 3.3 実効屈折率 n_{eff} と解の判別指標

Mode	n_{eff}	C_l	$1/\text{cond}([T(\gamma)])$	$\ [T(\gamma)]\{B\}_l\ _2$
HE ₁₁ ^a	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	3.3×10^3	9.7×10^{-12}	1.6×10^{-6}
HE ₁₁ ^b	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	6.6×10^2	9.7×10^{-12}	1.5×10^{-6}
TE ₀₁	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	1.3×10^3	3.7×10^{-12}	1.1×10^{-6}
HE ₂₁ ^a	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	7.1×10^2	2.4×10^{-13}	1.5×10^{-6}
HE ₂₁ ^b	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	2.9×10^3	2.4×10^{-13}	9.6×10^{-7}
TM ₀₁	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	6.6×10^2	4.7×10^{-13}	1.1×10^{-6}
HE ₃₁ [']	$1.430414041 - j2.218 \times 10^{-5}$	6.7×10^2	3.3×10^{-14}	1.2×10^{-6}
EH ₁₁ ^a	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	4.6×10^2	7.5×10^{-14}	2.3×10^{-6}
EH ₁₁ ^b	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	6.3×10^2	5.3×10^{-14}	1.4×10^{-6}
HE ₃₁ ^{''}	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$	3.0×10^2	3.0×10^{-14}	2.8×10^{-6}
HE ₁₂ ^a	$1.426891656 - j3.517 \times 10^{-5}$	3.1×10^2	5.1×10^{-14}	1.7×10^{-6}
HE ₁₂ ^b	$1.426891656 - j3.517 \times 10^{-5}$	3.1×10^2	5.2×10^{-14}	3.1×10^{-6}
Spurious	$1.445922889 + j1.001 \times 10^{-3}$	3.1×10^{15}	2.0×10^{-3}	1.9×10^2
Spurious	$1.444981369 - j1.476 \times 10^{-4}$	1.1×10^{15}	3.1×10^{-3}	2.5×10^2
Spurious	$1.444847502 - j1.894 \times 10^{-3}$	3.4×10^{15}	8.0×10^{-3}	8.9×10^2
Spurious	$1.444530200 - j4.604 \times 10^{-3}$	2.1×10^{15}	5.6×10^{-3}	2.0×10^3
Spurious	$1.443738247 + j2.304 \times 10^{-3}$	5.4×10^{15}	1.6×10^{-2}	7.8×10^2
Spurious	$1.443189083 - j4.562 \times 10^{-4}$	5.8×10^{15}	1.9×10^{-2}	1.0×10^3
Spurious	$1.438711392 - j6.620 \times 10^{-3}$	2.5×10^{15}	6.6×10^{-3}	3.2×10^3
Spurious	$1.435844908 - j8.046 \times 10^{-3}$	2.7×10^{15}	4.5×10^{-3}	3.6×10^3
†	$1.454988381 + j1.091 \times 10^{-3}$	1.4×10^{16}	2.9×10^{-3}	3.4×10^2
†	$1.429592082 - j1.488 \times 10^{-2}$	1.5×10^{16}	5.4×10^{-4}	2.9×10^3
†	$1.450873305 - j3.204 \times 10^{-3}$	4.7×10^{15}	4.0×10^{-4}	4.4×10^1
†	$1.447791081 + j6.306 \times 10^{-5}$	5.3×10^{15}	8.1×10^{-5}	2.7×10^1
†	$1.439820185 - j1.027 \times 10^{-2}$	2.3×10^{13}	7.1×10^{-5}	6.9×10^2
†	$1.439790575 - j1.035 \times 10^{-2}$	1.7×10^{13}	4.9×10^{-6}	7.6×10^1
†	$1.442467821 - j8.435 \times 10^{-3}$	1.1×10^9	2.7×10^{-9}	6.8×10^{-2}
†	$1.442450807 - j8.421 \times 10^{-3}$	1.7×10^9	1.9×10^{-9}	3.0×10^{-2}
†	$1.442513176 - j8.379 \times 10^{-3}$	1.0×10^9	3.7×10^{-10}	4.3×10^{-3}
†	$1.442513177 - j8.379 \times 10^{-3}$	3.0×10^9	2.4×10^{-9}	9.1×10^{-3}
†	$1.439166614 - j9.808 \times 10^{-3}$	3.8×10^6	1.3×10^{-12}	1.9×10^{-5}
†	$1.439166614 - j9.808 \times 10^{-3}$	5.6×10^5	2.1×10^{-13}	1.1×10^{-5}

The symbol “†” in the first column denotes a solution outside Γ .

表 3.4 HE₂₁ モードの実効屈折率 n_{eff} と $|\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}|$, $|\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\}|$ の N_s 依存性

(a) $\rho/k0 = 0.001$

L	N_s	$\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a\}$	$\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a\}$	$ \text{Re}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\} $	$ \text{Im}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\} $
2	8	1.43858606420762	$-38.697553 \times 10^{-7}$	2.6×10^{-4}	4.3×10^{-6}
	16	1.43844584209596	$-9.9287786 \times 10^{-7}$	2.8×10^{-12}	5.6×10^{-12}
	32	1.43844584209340	$-9.9287234 \times 10^{-7}$	2.0×10^{-14}	9.0×10^{-14}
	64	1.43844584209340	$-9.9287234 \times 10^{-7}$	δ	1.0×10^{-14}
	128	1.43844584209340	$-9.9287234 \times 10^{-7}$	1.0×10^{-14}	1.0×10^{-13}
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	1.0×10^{-14}	1.0×10^{-14}
4	8	1.43844584129123	$-9.9309999 \times 10^{-7}$	4.3×10^{-9}	2.4×10^{-9}
	16	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	32	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	64	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	128	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
8	8	1.43844584217649	$-9.9288250 \times 10^{-7}$	1.5×10^{-9}	7.4×10^{-10}
	16	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	32	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	64	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	128	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ

The symbol “ δ ” in the fifth and sixth columns denotes that the absolute value is less than 1×10^{-14} .

(b) $\rho/k0 = 0.01$

L	N_s	$\text{Re}\{n_{\text{eff}}^a\}$	$\text{Im}\{n_{\text{eff}}^a\}$	$ \text{Re}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\} $	$ \text{Im}\{n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b\} $
8	64	—	—	—	—
	128	1.43844862829672	$-17.612283 \times 10^{-7}$	6.1×10^{-5}	3.0×10^{-6}
	256	1.43844584103888	$-9.9332089 \times 10^{-7}$	3.6×10^{-8}	3.6×10^{-8}
	512	1.43844584209340	$-9.9287234 \times 10^{-7}$	δ	1.0×10^{-14}
	1024	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	1.0×10^{-14}	0.0
12	64	1.43844735307486	20.159032×10^{-7}	1.9×10^{-6}	4.7×10^{-7}
	128	1.43844584216747	$-9.9456144 \times 10^{-7}$	8.1×10^{-11}	1.7×10^{-9}
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	512	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	1024	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
16	64	1.43844585352536	$-9.9366927 \times 10^{-7}$	1.2×10^{-7}	1.1×10^{-7}
	128	1.43844584209348	$-9.9287236 \times 10^{-7}$	8.0×10^{-14}	1.0×10^{-14}
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	512	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	1024	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
20	64	1.43844584548046	$-9.9660141 \times 10^{-7}$	2.8×10^{-9}	1.4×10^{-11}
	128	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	256	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	512	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ
	1024	1.43844584209340	$-9.9287235 \times 10^{-7}$	δ	δ

The symbol “ δ ” in the fifth and sixth columns denotes that the absolute value is less than 1×10^{-14} .

表 3.5 計算時間の比較

M_c	Number of evaluations	Computation time [sec]	
		$[V]^H [T(\gamma)]^{-1} [V]$	$\text{cond}([T(\gamma)])$
5	16	0.2	0.2
	32	0.4	0.5
	64	0.7	0.9
	128	1.2	1.9
	256	2.9	3.7
	512	5.8	7.3
10	16	0.7	1.0
	32	1.3	1.9
	64	2.7	3.9
	128	5.4	7.5
	256	10.7	15.0
	512	21.3	29.9

表 3.6 空孔数 $3N_R(N_R + 1)$ のリング数 N_R の HF の実効屈折率と 3 つの判別指標

N_R	N_c	Mode	n_{eff}	C_l	$1/\text{cond}([T(\gamma)])$	$ [T(\gamma)]\{B\}_l _2$
2	18	TE ₀₁	$1.43858575517154 - j1.96 \times 10^{-12}$	1.2×10^3	2.2×10^{-11}	5.6×10^{-6}
		HE ₂₁ ^a	$1.43844563025243 - j2.48 \times 10^{-12}$	2.6×10^3	3.0×10^{-11}	6.5×10^{-6}
		HE ₂₁ ^b	$1.43844563025243 - j2.48 \times 10^{-12}$	1.6×10^3	3.0×10^{-11}	6.3×10^{-6}
		TM ₀₁	$1.43836647974314 - j9.34 \times 10^{-12}$	1.5×10^3	8.3×10^{-11}	2.3×10^{-5}
3	36	TE ₀₁	$1.43858575517071 - j\delta$	2.8×10^3	1.5×10^{-15}	1.4×10^{-6}
		HE ₂₁ ^a	$1.43844563025032 - j\delta$	5.4×10^3	8.7×10^{-15}	2.7×10^{-6}
		HE ₂₁ ^b	$1.43844563025033 + j\delta$	3.5×10^3	1.9×10^{-15}	3.0×10^{-6}
		TM ₀₁	$1.43836647973740 + j\delta$	2.8×10^3	7.8×10^{-15}	1.8×10^{-6}
4	60	TE ₀₁	$1.43858575517071 + j\delta$	5.7×10^3	2.2×10^{-15}	1.8×10^{-6}
		HE ₂₁ ^a	$1.43844563025032 - j\delta$	9.1×10^3	1.1×10^{-14}	3.0×10^{-6}
		HE ₂₁ ^b	$1.43844563025033 - j\delta$	5.5×10^3	2.7×10^{-15}	4.2×10^{-6}
		TM ₀₁	$1.43836647973740 - j\delta$	4.2×10^3	1.1×10^{-14}	3.5×10^{-6}
5	90	TE ₀₁	$1.43858575517071 + j\delta$	8.0×10^3	2.7×10^{-15}	2.5×10^{-6}
		HE ₂₁ ^a	$1.43844563025032 - j\delta$	1.3×10^4	1.5×10^{-14}	3.0×10^{-6}
		HE ₂₁ ^b	$1.43844563025033 + j\delta$	8.2×10^3	3.1×10^{-15}	1.9×10^{-6}
		TM ₀₁	$1.43836647973740 + j\delta$	6.4×10^3	1.3×10^{-14}	3.3×10^{-6}

The symbols “ δ ” in the fourth column denotes that the absolute value of the imaginary part of a computed result is less than 1×10^{-14} .

4 Multipole Method の定式化

4.1 まえがき

Multipole Method(MM) [32, 33] は複数の円柱や楕円柱による散乱電磁界の解析を対象として開発された。円柱座標系の波動関数である Fourier-Bessel 級数の重ね合わせで電磁界分布を表現するため、区分的多項式関数で電磁界を表現する有限要素法と比べ、少ない未知数で同程度の精度の解析結果が得られる。

しかしながら、Fourier-Bessel 級数の展開次数が増加すると MM の計算精度が低下する。これは、ハンケル関数の次数が高次になると、関数値が大きくなり、MM が導く行列方程式の係数行列が悪条件となり、SSM の計算に用いる係数行列の逆行列に右から乱数行列をかける計算の精度が低下するためである。複雑な電磁界分布を近似するためには、高次のハンケル関数が必要となる。

非線形固有値問題は Sakurai-Sugiura 法 (SSM) [37–40] で高精度に求解できることを前章で述べた。SSM の計算では、モーメントの次数 M 、多重度 L 、周回積分路の標本点数 N_s が必要であり、解析ごとにパラメータを決定する必要がある。

この問題を克服するために、従来よりも高次のハンケル関数を含む Fourier-Bessel 級数展開が可能となる定式化を述べ、次に、SSM のパラメータのモーメントの次数 M を 1 に固定してよいことを数値的に示す。係数行列の条件数を改善するために、2 つの定式化を示し、従来の定式化と比較し、本定式化の有用性を示している。加えて、SSM の求解領域とブランチポイント (BP) との距離について、従来の定式化と比較し、本定式化の有用性を確認した。SSM のパラメータについては、中心が異なる 3 つの積分路について、 $M \times L$ を固定して M 依存性を調べ、3 つの積分路で M が小さいほうが縮退実効屈折率差が小さいことから、 $M = 1$ に決定した。

4.2 Multipole Method の定式化

図 4.1 に示すような，無限に広がる誘電体 (屈折率 n_+) 中に半径 $R_i (i = 1, 2, \dots, N_c)$ の空孔 (屈折率 n_-) が N_c 本配置された断面を有する， z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路を考える．円柱座標系 (r, θ, z) を全体座標系と，各空孔の中心を原点とした局所座標系 (r_i, θ_i, z_i) ， $i = 1, 2, \dots, N_c$ を考える．断面構造の z 軸方向の一様性から，複素伝搬定数を γ ，角周波数を ω とすると電磁界は $\exp\{j(\omega t - \gamma z)\}$ の依存性を持つ．ここで， t は時間， j は虚数単位である．電磁界の z 成分を，局所円柱座標系 (r_i, θ_i, z_i) の波動方程式，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + k_0^2 n_p^2 - \gamma^2 \right) \phi_{z,i} = 0 \quad (4.1)$$

を満たすように空間高調波展開すると，

$$\phi_{z,i}(r_i, \theta_i) = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \left[a_{m,i}^{p,\phi} J_m(\kappa_p r_i) + b_{m,i}^{p,\phi} H_m^{(2)}(\kappa_p r_i) \right] e^{jm\theta_i}, \quad (4.2)$$

となる．電磁界の θ 成分は， z 成分を用いて，

$$E_{\theta,i}(r_i, \theta_i) = \frac{-j}{\kappa_p^2} \left(\frac{\gamma}{r_i} \frac{\partial E_{z,i}}{\partial \theta_i} - k_0 \eta \frac{\partial H_{z,i}}{\partial r_i} \right), \quad (4.3)$$

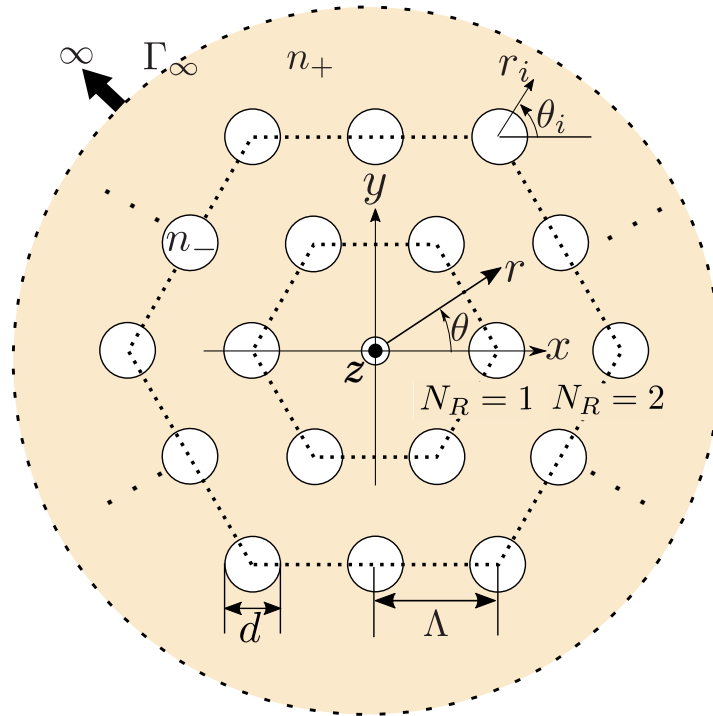


図 4.1 Holey fiber の断面構造

$$H_{\theta,i}(r_i, \theta_i) = \frac{-j}{\kappa_p^2} \left(\frac{\gamma}{r_i} \frac{\partial H_{z,i}}{\partial \theta_i} + \frac{k_0 n_p^2}{\eta} \frac{\partial E_{z,i}}{\partial r_i} \right), \quad (4.4)$$

と表現できる．ここで、 ϕ_z は電界成分 E_z もしくは磁界成分 H_z 、 M_c は Fourier-Bessel 級数の打ち切り次数、 κ_p は断面内波数で $\kappa_p = \sqrt{k_0^2 n_p^2 - \gamma^2}$ 、 k_0 は真空中の波数、 p は空孔の内側では $-$ 、外側では $+$ 、 J_m は第 1 種ベッセル関数、 $H_m^{(2)}$ は第 2 種ハンケル関数、 $a_{m,i}^{p,\phi}$ 、 $b_{m,i}^{p,\phi}$ は未知係数であり、 $b_{m,i}^{-,\phi} = 0$ である．

4.2.1 散乱行列

4.2.1.1 計算精度改善のための要素内の計算が容易な散乱行列

i 番目の空孔に着目し、空孔の境界 $\Gamma_i(r_i = R_i)$ 上で空孔の内外の電磁界の接線成分、 $E_{z,i}$ 、 $H_{z,i}$ 、 $E_{\theta,i}$ 、 $H_{\theta,i}$ が連続である条件を課し、

$$G_{1,i}A_{-,i} = G_{2,i}A_{+,i} + G_{3,i}B_{+,i}, \quad (4.5)$$

$$K_{1,i}A_{-,i} = K_{2,i}A_{+,i} + K_{3,i}B_{+,i}, \quad (4.6)$$

$$G_{1,i} = \begin{bmatrix} [J_m(\kappa_- R_i)] & [0] \\ [0] & [J_m(\kappa_- R_i)] \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$G_{2,i} = \begin{bmatrix} [J_m(\kappa_+ R_i)] & [0] \\ [0] & [J_m(\kappa_+ R_i)] \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$G_{3,i} = \begin{bmatrix} [H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i)] & [0] \\ [0] & [H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i)] \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$K_{1,i} = \frac{1}{\kappa_-^2} \begin{bmatrix} [jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_- R_i)] & -[k_0 \eta J'_m(\kappa_- R_i)] \\ [\frac{k_0 n_-^2}{\eta} J'_m(\kappa_- R_i)] & [jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_- R_i)] \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$K_{2,i} = \frac{1}{\kappa_+^2} \begin{bmatrix} [jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_+ R_i)] & -[k_0 \eta J'_m(\kappa_+ R_i)] \\ [\frac{k_0 n_+^2}{\eta} J'_m(\kappa_+ R_i)] & [jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_+ R_i)] \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$K_{3,i} = \frac{1}{\kappa_+^2} \begin{bmatrix} [jm \frac{\gamma}{R_i} H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i)] & -[k_0 \eta H_m^{(2)'}(\kappa_+ R_i)] \\ [\frac{k_0 n_+^2}{\eta} H_m^{(2)'}(\kappa_+ R_i)] & [jm \frac{\gamma}{R_i} H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i)] \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

を得る．ここで、 $G_{1,i}$ 、 $G_{2,i}$ 、 $G_{3,i}$ 、 $K_{1,i}$ 、 $K_{2,i}$ 、 $K_{3,i} \in \mathbb{C}^{2(2M_c+1) \times 2(2M_c+1)}$ 、(4.7)~(4.12) 中の小行列は $m = -M_c, \dots, M_c$ を対角成分にもつ $(2M_c + 1)$ 行 $(2M_c + 1)$ 列の対角行列であり、 $A_{-,i} = \{\{a_i^{-,E}\}^t \{a_i^{-,H}\}^t\}^t$ 、 $A_{+,i} = \{\{a_i^{+,E}\}^t \{a_i^{+,H}\}^t\}^t$ 、 $B_{+,i} = \{\{b_i^{+,E}\}^t \{b_i^{+,H}\}^t\}^t \in \mathbb{C}^{2(2M_c+1)}$ であり、 $a_i^{p,\phi}$ 、 $b_i^{p,\phi} \in \mathbb{C}^{(2M_c+1)}$ は $a_{m,i}^{p,\phi} (m = -M_c, -M_c + 1, \dots, M_c - 1, M_c)$ で構成される．

4.2.1.2 従来の散乱行列

(4.5) を $A_{-,i}$ について解き, (4.6) に代入し, $B_{+,i}$ について整理すると,

$$B_{+,i} = S_i A_{+,i}, \quad (4.13)$$

$$S_i = \left[K_{1,i} G_{1,i}^{-1} G_{3,i} - K_{3,i} \right]^{-1} \left[K_{2,i} - K_{1,i} G_{1,i}^{-1} K_{2,i} \right] \quad (4.14)$$

となる.

4.2.1.3 精度改善のための逆行列を用いない散乱行列

(4.5) と (4.6) を $a_i^{-,E} = \{a_{m,i}^{-,E}\}$, $a_i^{-,H} = \{a_{m,i}^{-,H}\}$, $a_i^{+,E} = \{a_{m,i}^{+,E}\}$, $a_i^{+,H} = \{a_{m,i}^{+,H}\}$, $b_i^{+,E} = \{b_{m,i}^{+,E}\}$, $b_i^{+,H} = \{b_{m,i}^{+,H}\} \in \mathbb{C}^{2M_c+1}$ を用いて,

$$G_{1,i}^{EE} a_i^{-,E} = G_{2,i}^{EE} a_i^{+,E} + G_{3,i}^{EE} b_{+,E}, \quad (4.15)$$

$$K_{1,i}^{EE} a_i^{-,E} + K_{1,i}^{EH} a_i^{-,H} = K_{2,i}^{EE} a_i^{+,E} + K_{2,i}^{EH} a_i^{+,H} + K_{3,i}^{EE} b_i^{+,E} + K_{3,i}^{EH} b_i^{+,H}, \quad (4.16)$$

$$G_{1,i}^{HH} a_i^{-,H} = G_{2,i}^{HH} a_i^{+,H} + G_{3,i}^{HH} b_{+,E}, \quad (4.17)$$

$$K_{1,i}^{HE} a_i^{-,E} + K_{1,i}^{HH} a_i^{-,H} = K_{2,i}^{HE} a_i^{+,E} + K_{2,i}^{HH} a_i^{+,H} + K_{3,i}^{HE} b_i^{+,E} + K_{3,i}^{HH} b_i^{+,H}, \quad (4.18)$$

となる. ここに, (4.7)~(4.12) より,

$$G_{1,i}^{EE} = G_{1,i}^{HH} = [J_m(\kappa_- R_i)], \quad (4.19)$$

$$G_{2,i}^{EE} = G_{2,i}^{HH} = [J_m(\kappa_+ R_i)], \quad (4.20)$$

$$G_{3,i}^{EE} = G_{3,i}^{HH} = \left[H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.21)$$

$$K_{1,i}^{EE} = K_{1,i}^{HH} = \frac{1}{\kappa_-^2} \left[jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_- R_i) \right], \quad (4.22)$$

$$K_{1,i}^{EH} = -\frac{1}{\kappa_-^2} \left[k_0 \eta J'_m(\kappa_- R_i) \right], \quad (4.23)$$

$$K_{1,i}^{HE} = \frac{1}{\kappa_-^2} \left[\frac{k_0 n_-^2}{\eta} J'_m(\kappa_- R_i) \right], \quad (4.24)$$

$$K_{2,i}^{EE} = K_{2,i}^{HH} = \frac{1}{\kappa_+^2} \left[jm \frac{\gamma}{R_i} J_m(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.25)$$

$$K_{2,i}^{EH} = -\frac{1}{\kappa_+^2} \left[k_0 \eta J'_m(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.26)$$

$$K_{2,i}^{HE} = \frac{1}{\kappa_+^2} \left[\frac{k_0 n_+^2}{\eta} J'_m(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.27)$$

$$K_{3,i}^{EE} = K_{3,i}^{HH} = \frac{1}{\kappa_+^2} \left[j m \frac{\gamma}{R_i} H_m^{(2)}(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.28)$$

$$K_{3,i}^{EH} = -\frac{1}{\kappa_+^2} \left[k_0 \eta H_m^{(2)'}(\kappa_+ R_i) \right], \quad (4.29)$$

$$K_{3,i}^{HE} = \frac{1}{\kappa_+^2} \left[\frac{k_0 n_+^2}{\eta} H_m^{(2)'}(\kappa_+ R_i) \right] \quad (4.30)$$

であり, (4.19)~(4.30) は $m = -M_c, -(M_c - 1), \dots, M_c - 1, M_c$ を対角成分に持つ $2M_c + 1$ 行 $2M_c + 1$ 列の対角行列である. (4.15) を a_i^{-E} , (4.17) を a_i^{-H} について解き, (4.16) と (4.18) に代入して,

$$\begin{aligned} K_{1,i}^{EE} [G_{1,i}^{EE}]^{-1} (G_{2,i}^{EE} a_i^{+,E} + G_{3,i}^{EE} b_i^{+,E}) + K_{1,i}^{EH} [G_{1,i}^{HH}]^{-1} (G_{2,i}^{HH} a_i^{+,H} + G_{3,i}^{HH} b_i^{+,H}) \\ = K_{2,i}^{EE} a_i^{+,E} + K_{2,i}^{EH} a_i^{+,H} + K_{3,i}^{EE} b_i^{+,E} + K_{3,i}^{EH} b_i^{+,H}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} K_{1,i}^{HE} [G_{1,i}^{EE}]^{-1} (G_{2,i}^{EE} a_i^{+,E} + G_{3,i}^{EE} b_i^{+,E}) + K_{1,i}^{HH} [G_{1,i}^{HH}]^{-1} (G_{2,i}^{HH} a_i^{+,H} + G_{3,i}^{HH} b_i^{+,H}) \\ = K_{2,i}^{HE} a_i^{+,E} + K_{2,i}^{HH} a_i^{+,H} + K_{3,i}^{HE} b_i^{+,E} + K_{3,i}^{HH} b_i^{+,H} \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる. (4.19)~(4.30) は対角行列であるので, $K_{1,i}^{EE} [G_{1,i}^{EE}]^{-1} = [G_{1,i}^{EE}]^{-1} K_{1,i}^{EE}$ であり, $K_{1,i}^{EH} [G_{1,i}^{HH}]^{-1}$, $K_{1,i}^{HE} [G_{1,i}^{EE}]^{-1}$, $K_{1,i}^{HH} [G_{1,i}^{HH}]^{-1}$ にも適用して, (4.31) と (4.32) をまとめると,

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} [G_{1,i}^{EE}]^{-1} K_{1,i}^{EE} G_{2,i}^{EE} & [G_{1,i}^{HH}]^{-1} K_{1,i}^{EH} G_{2,i}^{HH} \\ [G_{1,i}^{EE}]^{-1} K_{1,i}^{HE} G_{2,i}^{EE} & [G_{1,i}^{HH}]^{-1} K_{1,i}^{HH} G_{2,i}^{HH} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{2,i}^{EE} & K_{2,i}^{EH} \\ K_{2,i}^{HE} & K_{2,i}^{HH} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a_i^{+,E} \\ a_i^{+,H} \end{Bmatrix} = \\ \left(\begin{bmatrix} [G_{1,i}^{EE}]^{-1} K_{1,i}^{EE} G_{3,i}^{EE} & [G_{1,i}^{HH}]^{-1} K_{1,i}^{EH} G_{3,i}^{HH} \\ [G_{1,i}^{EE}]^{-1} K_{1,i}^{HE} G_{3,i}^{EE} & [G_{1,i}^{HH}]^{-1} K_{1,i}^{HH} G_{3,i}^{HH} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{3,i}^{EE} & K_{3,i}^{EH} \\ K_{3,i}^{HE} & K_{3,i}^{HH} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} b_i^{+,E} \\ b_i^{+,H} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる. (4.33) を行列 $G_{1,i}$, $G_{2,i}$, $G_{3,i}$, $K_{1,i}$, $K_{2,i}$, $K_{3,i}$ で表現すると,

$$\left(G_{1,i}^{-1} K_{1,i} G_{2,i} - K_{2,i} \right) A_{+,i} = \left(G_{1,i}^{-1} K_{1,i} G_{3,i} - K_{3,i} \right) B_{+,i} \quad (4.34)$$

となり, 両辺に行列 $G_{1,i}$ を左からかけると,

$$S_{a,i} A_{+,i} = S_{b,i} B_{+,i}, \quad (4.35)$$

$$S_{a,i} = (K_{1,i} G_{2,i} - G_{1,i} K_{2,i}), \quad (4.36)$$

$$S_{b,i} = (K_{1,i} G_{3,i} - G_{1,i} K_{3,i}) \quad (4.37)$$

となり, 逆行列の計算が不要となる.

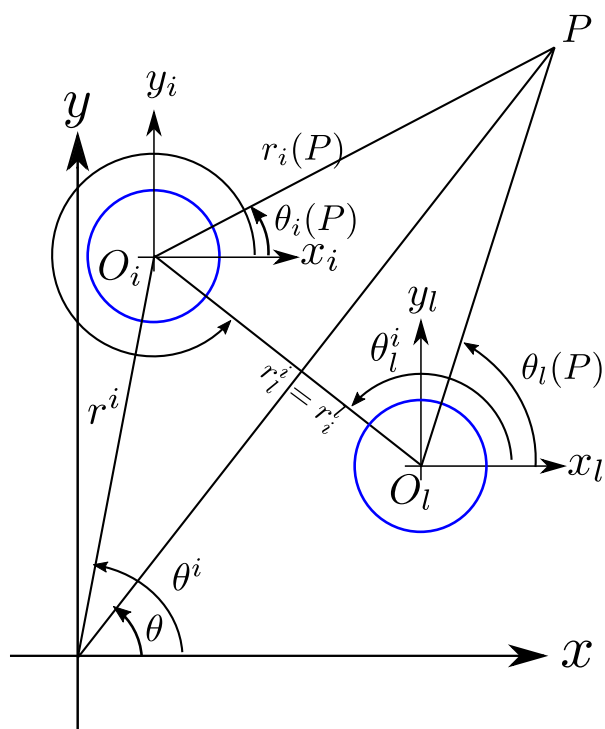


図 4.2 局所座標系と全体座標系

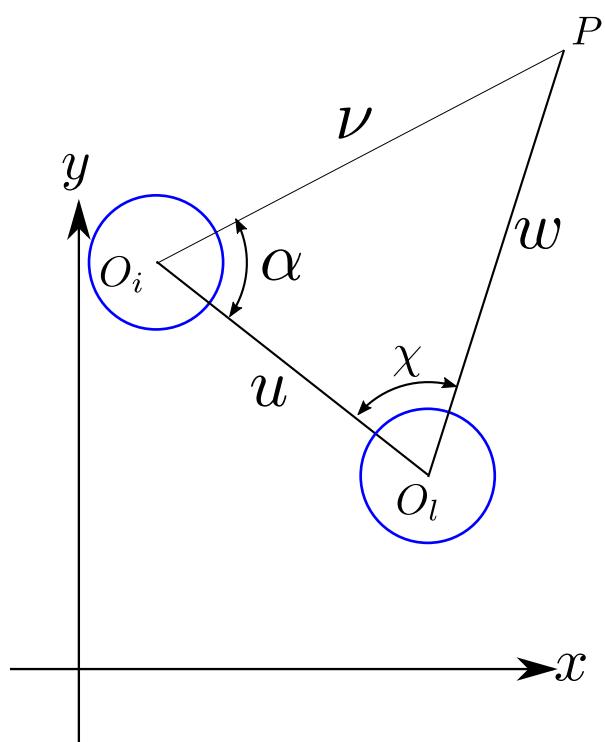


図 4.3 Graf の加法定理

4.2.2 空孔間の電磁界の関係

l 番目の空孔から散乱された電磁界は、図 4.3 に示す点 P において、(4.2) の 2 項目から、

$$E_{z,l}^s = \sum_{m=-M_c}^{M_c} b_{m,l}^{+,E} H_m^{(2)}(\kappa_+ r_l(P)) \exp\{jm\theta_l(P)\} \quad (4.38)$$

であり、 i 番目の空孔に入射する電磁界は、点 P において、(4.2) の 1 項目から、

$$E_{z,i}^{\text{in}} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} a_{m,i}^{+,E} J_m(\kappa_+ r_i(P)) \exp\{jm\theta_i(P)\} \quad (4.39)$$

である。点 P において、Graf の加法定理 [72] から、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} H_m^{(2)}(w) \exp\{jm\chi\} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{m+q}^{(2)}(u) J_q(v) \exp\{jq\alpha\} \quad (4.40)$$

を得る。ここで、 $u = \kappa_+ r_i^l$, $v = \kappa_+ r_i(P)$, $w = \kappa_+ r_l(P)$ とする。図 4.2 と図 4.3 の対応を考えると、 $\chi = \theta_i^l - \theta_l(P)$, $\alpha = 2\pi i - \theta_i^l + \theta_i(P)$, $\theta_i^l = \pi - \theta_l^l$ となるので、(4.40) は、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} H_m^{(2)}(\kappa_+ r_l(P)) e^{jm\pi} e^{-jm\theta_i^l} e^{-jm\theta_l(P)} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{m+q}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) J_q(\kappa_+ r_i(P)) e^{j2q\pi} e^{-jq\theta_i^l} e^{jq\theta_l(P)} \quad (4.41)$$

となる。 $e^{jm\pi} = (-1)^m$ と m を便宜上、 $-m$ とすると、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} H_{-m}^{(2)}(\kappa_+ r_l(P)) e^{jm\theta_l(P)} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} J_q(\kappa_+ r_i(P)) e^{jq\theta_l(P)} (-1)^{-m} \quad (4.42)$$

となり、 $H_{-m}^{(2)}(\kappa_+ r_l(P)) = (-1)^m H_m^{(2)}(\kappa_+ r_l(P))$ より、(4.42) は、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} H_m^{(2)}(\kappa_+ r_l(P)) e^{jm\theta_l(P)} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} J_q(\kappa_+ r_i(P)) e^{jq\theta_l(P)} \quad (4.43)$$

となる。(4.38) に (4.43) を代入して、

$$E_{z,l}^s = \sum_{m=-M_c}^{M_c} b_{m,l}^{+,E} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} J_q(\kappa_+ r_i(P)) e^{jq\theta_l(P)} \quad (4.44)$$

と変形でき、 i 番目の空孔に入射する電界は、(4.39) を用いて、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} a_{m,i}^{+,E} J_m(\kappa_+ r_i(P)) \exp\{jm\theta_i(P)\} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} b_{m,l}^{+,E} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} J_q(\kappa_+ r_i(P)) e^{jq\theta_l(P)} \quad (4.45)$$

とでき、整理すると、

$$\sum_{m=-M_c}^{M_c} a_{m,i}^{+,E} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} b_{m,l}^{+,E} \sum_{q=-M_c}^{M_c} H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} \quad (4.46)$$

となる．磁界も同じ関係式となるので，行列方程式にまとめると，

$$A_{+,i} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} Y_{i,l} B_{+,l} \quad (4.47)$$

となる．ここで， $Y_{i,l} \in \mathbb{C}^{2(2M_c+1) \times 2(2M_c+1)}$ であり，

$$Y_{i,l} = \begin{bmatrix} [y_{m,q}] & [0] \\ [0] & [y_{m,q}] \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$[y_{m,q}] \in \mathbb{C}^{2M_c+1 \times 2M_c+1}$ の $y_{m,q}$ は，

$$y_{m,q} = H_{q-m}^{(2)}(\kappa_+ r_i^l) e^{j(m-q)\theta_i^l} \quad (4.49)$$

である．

4.2.3 非線形固有値問題

4.2.3.1 従来の定式化

(4.13) に (4.47) を代入すると，

$$B_{+,i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} S_l Y_{i,l} B_{+,l} = \{0\} \quad (4.50)$$

となり，

$$\begin{bmatrix} I & -S_1 Y_{1,2} & -S_1 Y_{1,3} & \cdots & -S_1 Y_{1,N_c} \\ -S_2 Y_{2,1} & I & -S_2 Y_{2,3} & \cdots & -S_2 Y_{2,N_c} \\ -S_3 Y_{3,1} & -S_3 Y_{3,2} & I & \cdots & -S_3 Y_{3,N_c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_{N_c} Y_{N_c,1} & -S_{N_c} Y_{N_c,2} & -S_{N_c} Y_{N_c,3} & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{+,1} \\ B_{+,2} \\ B_{+,3} \\ \vdots \\ B_{+,N_c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

である [32, 34]．ここに， I は $2(2M_c+1)$ 行 $2(2M_c+1)$ 列の単位行列である．(4.51) は最終的に，固有値 γ ，固有ベクトル x_1 とした，

$$T_1(\gamma)x_1 = \{0\} \quad (4.52)$$

と表せる．ここで， $T_1(\gamma) \in \mathbb{C}^{2N_c(2M_c+1) \times 2N_c(2M_c+1)}$ ， $x_1 \in \mathbb{C}^{2N_c(2M_c+1)}$ である．

4.2.3.2 逆行列が無い定式化 (Type A)

(4.5) と (4.6) に (4.47) を代入すると，

$$G_{1,i} A_{-,i} = G_{2,i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} Y_{i,l} B_{+,l} + G_{3,i} B_{+,i} \quad (4.53)$$

$$K_{1,i} A_{-,i} = K_{2,i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} Y_{i,l} B_{+,l} + K_{3,i} B_{+,i} \quad (4.54)$$

となり, $A_{-,i}$, $B_{+,i}$ でまとめると,

$$\left[\begin{array}{cccc} G_{3,1} & G_{2,1}Y_{1,2} & \cdots & G_{2,1}Y_{1,N_c} \\ G_{2,2}Y_{2,1} & G_{3,2} & \cdots & G_{2,2}Y_{2,N_c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{2,N_c}Y_{N_c,1} & G_{2,N_c}Y_{N_c,2} & \cdots & G_{2,N_c}Y_{N_c,N_c} \\ K_{3,1} & K_{2,1}Y_{1,2} & \cdots & K_{2,1}Y_{1,N_c} \\ K_{2,2}Y_{2,1} & K_{3,2} & \cdots & K_{2,2}Y_{2,N_c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{2,N_c}Y_{N_c,1} & K_{2,N_c}Y_{N_c,2} & \cdots & K_{2,N_c}Y_{N_c,N_c} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} G_{1,1} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & G_{1,2} & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & G_{1,N_c} \\ K_{1,1} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & K_{1,2} & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & K_{1,N_c} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} B_{+,1} \\ B_{+,2} \\ \vdots \\ B_{+,N_c} \\ A_{-,1} \\ A_{-,2} \\ \vdots \\ A_{-,N_c} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (4.55)$$

となる. (4.55) は, 固有値 γ , 固有ベクトル x_2 とした,

$$T_2(\gamma)x_2 = \{0\} \quad (4.56)$$

と表せる. ここで, $T_2(\gamma) \in \mathbb{C}^{4N_c(2M_c+1) \times 4N_c(2M_c+1)}$, $x_2 \in \mathbb{C}^{4N_c(2M_c+1)}$ である. (4.56) は, 電磁界の連続条件を課した (4.5) と (4.6) を直接用いることから, 逆行列は用いず, 要素内の計算式が簡単である. しかしながら, (4.56) の固有ベクトルが $A_{-,i}$ と $B_{+,i}$ であるため, 行列サイズが (4.52) の 2 倍となっている.

4.2.3.3 逆行列が無い定式化 (Type B)

(4.35) に (4.47) を代入すると,

$$S_{b,i}B_{+,i} - S_{a,i} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_c} Y_{i,l}B_{+,l} = \{0\} \quad (4.57)$$

となり, 行列形式にまとめると,

$$\left[\begin{array}{ccccc} S_{b,1} & -S_{a,1}Y_{1,2} & -S_{a,1}Y_{1,3} & \cdots & -S_{a,1}Y_{1,N_c} \\ -S_{a,2}Y_{2,1} & S_{b,2} & -S_{a,2}Y_{2,3} & \cdots & -S_{a,2}Y_{2,N_c} \\ -S_{a,3}Y_{3,1} & -S_{a,3}Y_{3,2} & S_{b,3} & \cdots & -S_{a,3}Y_{3,N_c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_{a,N_c}Y_{N_c,1} & -S_{a,N_c}Y_{N_c,2} & -S_{a,N_c}Y_{N_c,3} & \cdots & S_{b,N_c} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} B_{+,1} \\ B_{+,2} \\ B_{+,3} \\ \vdots \\ B_{+,N_c} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (4.58)$$

となる. (4.58) は最終的に, 固有値 γ , 固有ベクトル x_3 とした,

$$T_3(\gamma)x_3 = \{0\} \quad (4.59)$$

と表せる. ここに, $T_3(\gamma) \in \mathbb{C}^{2N_c(2M_c+1) \times 2N_c(2M_c+1)}$, $x_3 \in \mathbb{C}^{2N_c(2M_c+1)}$ である. (4.59) は, (4.35) 中で逆行列を用いず, 従来の定式化である (4.52) と同じ行列サイズで計算できる.

以降では, (4.52) を従来の定式化, (4.56) を Type A, (4.59) を Type B とする.

4.3 数値計算例

従来の定式化 [32,34] の (4.52), と再定式化した, (4.56) と (4.59) の非線形固有値問題に, ブロック版 SSM を適用して HF の実効屈折率 n_{eff} の打ち切りモード次数 M_c 依存性を調査し, 従来の定式化よりも, 大きい M_c を設定できることを確認する. また, 従来よりも積分路をブランチポイント (BP) に近付けられることを確認する.

図 4.5 に示すような, 空孔数 $N_c = 6$ の HF を考える. 部材の屈折率 $n_+ = 1.45$, 空孔の屈折率 $n_- = 1$, 空孔の直径 d , 規格化した空孔間距離 $\Lambda = 1.35d$, $k_0d = \pi/0.145$ とする. SSM のパラメータは, 中心 $o/k_0 = 1.4385$, 半径 $\rho/k_0 = 0.001$, 標本点数 $N_s = 256$, $L = 10$, $M = 1$ とした. HE_{21} モードのような縮退モードについては, 実効屈折率 n_{eff} の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ の値が大きい方を上添え字 a , 小さいほうを b とし, HE_{21}^a , HE_{21}^b と表す. 計算には, MATLAB を使用し, 8 倍精度演算には, Advanpix Multiprecision Computing Toolbox [74] を用いた.

4.3.1 計算精度と計算時間

計算精度低下の原因を確認する. 表 4.1 は, 複素 n_{eff} 平面上の標本点 $n_{\text{eff}} = 1.439499924701839 + j1.227153828571993 \times 10^{-5}$ における δ_m , $R_{i,m}^{EE}$ の値のモード次数 m 依存性を調べたものである. m が大きくなるにつれて δ_m の値が大きくなり, $R_{i,m}^{EE}$ の値は小さくなっている. 図 4.6, 4.8, 4.7 に, 表 4.1 と同じパラメータでの $T^{-1}V$ の全要素の相対誤差を示す. ここで, 横軸の番号は, $T^{-1}V$ の (p,q) 要素を $p+N(q-1)$ とした. ここに N は, (4.52) と (4.59) では $N = 2N_c(2M_c+1)$, (4.56) では $N = 4N_c(2M_c+1)$ である. 真値は 8 倍精度で計算し, 乱数行列 V は 8 倍精度と倍精度で同じシード値により生成した. $M_c = 10$ では, 従来の定式化, Type B, Type A では, 相対誤差が実部, 虚部の両方で 10^{-7} , 10^{-6} , 10^{-9} 以下である. しかしながら, $M_c = 30$ では, 実部, 虚部の相対誤差が最大で, 従来の定式化 (4.52) では 10^{12} , Type B では 10^{-4} , Type A では 10^{-9} 以下である.

図 4.9 に, 従来の (4.52) 中の係数行列 T の条件数 $\text{cond}(T)$ の分布を示す. ブランチポイント BP は, n_+ なので $(1.45, 0)$ である. 通常は, 導波モードの実効屈折率 n_{eff} を求めるので, 複素 n_{eff} 平面上の長方形領域, $1.435 \leq \text{Re}(n_{\text{eff}}) \leq 1.45$ かつ $0.01 \leq \text{Im}(n_{\text{eff}}) \leq 0.01$, を示した. BP 付近で条件数が大きくなっている. (a) に示した $M_c = 5$ よりも (b) に示す $M_c = 10$ の方が条件数が大きい範囲が広い.

図 4.10 に HE_{21}^a モードの分散特性値の相対誤差の打ち切りモード次数 M_c 依存性を示す. 真値は 8 倍精度演算結果を 34 桁に丸めたものであり, M_c についての収束は, それぞれ, n_{eff} は 21 桁, v_g/c_0 は 18 桁, D は 12 桁収束しており, $n_{\text{eff}} = 1.438444831966682954777999467553242$, $v_g/c_0 = 0.684624623147550035634336771517231$, $D = 45.16612436576880655527129382439220$ である. (a) では, 従来の定式化では $M_c = 14$ から, Type A では $M_c = 17$ から相対誤差が大きくなり, 以降の M_c の相対誤差の最大はそれぞれ 10^{-4} , 10^{-8} 程度となっている. 他方, Type B では M_c が 17 から 28 までの相対誤差は 10^{-17} から 10^{-14} の間に収まっている.

表 4.2(a)(b)(c) は, それぞれ, HE_{21} , TM_{01} モードの実効屈折率 n_{eff} , 規格化群速度 v_g/c_0 , 群

速度分散 D の打ち切りモード次数 M_c 依存性をまとめたものである．OPA で計算した TM_{01} , HE_{21} モードの $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ は、それぞれ、 $M_c = 24$ で 23, 22 桁収束している．DPA の従来の定式化, Type B, Type A の値は、 $M_c = 14$ で 14 桁、OPA の TM_{01} モードの収束した 23 桁の値 $\text{Re}(n_{\text{eff}}) = 1.4383649341788739965206$ と一致している． HE_{21} モードの OPA の収束した 22 桁の値 $n_{\text{eff}} = 1.438444831966682954778$ と、従来の定式化では $M_c = 14$, Type A と Type B では $M_c = 16$ で、それぞれ、14, 15 桁一致する．また、従来の定式化と Type A は M_c が増加するにつれて、OPA の計算結果との一致桁数が減少していくが、TypeB は $M_c = 28$ でも 14 桁、OPA の結果と一致している．

OPA の群速度 v_g/c_0 は、 TM_{01} と HE_{21} モードともに 19 桁収束している．従来の定式化, Type B, Type A は、 TM_{01} モードでは、 $M_c = 10$ でそれぞれ 13, 14, 13 桁、 HE_{21} モードでは、 $M_c = 12$ でそれぞれ、12, 16, 14 桁 OPA の値と一致する．OPA の群速度分散 D は、 TM_{01} と HE_{21} モードはどちらも、13 桁収束している．従来の定式化, Type B, Type A の値は、 TM_{01} モードでは $M_c = 10$ でそれぞれ、7, 8, 9 桁、 HE_{21} モードでは $M_c = 10$ でいずれも 8 桁 OPA の値と一致している．

図 4.11 は、縮退する HE_{21} モードの実効屈折率の実部の差 $|\text{Re}(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)|$ の打ち切りモード次数 M_c 依存性を調べたものである．ここで、差が 10^{-16} 以下は省略してある．差の大きさが 10^{-15} よりも大きくなる M_c の範囲は、従来, Type A, Type B の定式化の順に、12, 17, 20 以上となっている．

図 4.12 に、 HE_{21} モードの実効屈折率の実部の差 $|\text{Re}(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)|$ の BP と積分路の距離 d_{BP} 依存性を示す． $d_{BP} = 1.45 - (\rho/k_0 + o/k_0)$ であり、SSM の求解領域円の半径 ρ/k_0 は 0.01 に変更し、 $L = 32$ とし、打ち切りモード次数 M_c は、図 4.11 に示した誤差が小さな $M_c = 10$ とした．従来と Type A, Type B の定式化では、 d_{BP} が 6×10^{-3} , 1×10^{-3} より小さくなると差が大きくなっている．

以上まとめると、計算精度が同じであれば、Type B の定式化は実効屈折率、規格化群速度、群速度分散のいずれも、他の 2 つ定式化より M_c の上限の制約を緩和できることを確認した．また、Type A と Type B の定式化は BP の積分路を近づけても小さい 2 重縮退の実効屈折率差で計算できる．

4.3.2 それぞれの定式化における計算時間

図 4.14 に、従来, Type A, Type B の定式化における計算時間の打ち切りモード次数 M_c 依存性を示す．計算時間は、実効屈折率 n_{eff} , 規格化群速度 v_g/c_0 , 群速度分散 D の計算を 50 回反復した平均計算時間である．計測に用いた計算機は、CPU が Intel Xenon Gold 6140 2.3 GHz, 主記憶容量 96 GB であり、MATLAB の Parallel computing toolbox を用いて並列化して計算している． M_c が 5 程度では、いずれの定式化の計算時間も同程度であるが、 M_c が大きくなるにつれて、TypeA の計算時間が他の 2 つよりも長くなっている．これは、NEP の係数行列の行列サイズが、他のものの 2 倍であるためと考えられる．

まとめると、従来と Type B の定式化は同程度の計算時間で、大きい M_c の値では Type A は NEP

の行列サイズが他のものの2倍のため計算時間が長くなる。

4.3.3 SSM パラメータの M の決定

次に、自動最適化設計を行う場合に、決定する SSM のパラメータ数を減少させるために、モーメント次数 M について検討する。縮退モードである HE_{21} モードに着目し、TypeB の MM の定式化にブロック版 SSM を適用して、SSM パラメータのモーメント次数 M について検討する。

図 4.15 に、 HE_{21} モードの縮退実効屈折率差 $|\text{Re}(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)|$ のモーメント次数 M 依存性を示す。ここで、MM の打ち切りモード次数 $M_c = 10$ とし、求解領域円の中心 $o/k_0 = 1.43, 1.436, 1.439$ とし、各求解領域円内の全固有値数は 12 であり、 $M \times L = 16, 24, 32$ として M が $1 \leq M \leq 16$ の範囲で M の依存性を調査した。全ての求解領域円と $M \times L$ において、モーメント次数 M が大きくなるにつれて縮退実効屈折率差が増加しており、 M が小さいほうが縮退実効屈折率差が小さい。加えて、 $M \times L = 32$ をみると、同じ M の値で求解領域円が BP に近づくにつれて縮退実効屈折率差が増加する。

図 4.16 に、 HE_{21} モードの実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}}^a)$ の相対誤差のモーメント次数 M 依存性を示す。ここで、解析解は、8 倍精度演算で計算した実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}}^a)$ を用いた。それぞれの求解領域円、 $M \times L$ の値で、モーメント次数 M の値が大きくなるにつれて相対誤差が大きくなっている。

以上から、SSM パラメータのモーメント次数 M は小さい値の方が計算精度、縮退実効屈折率差が小さいことから、 $M = 1$ としてもよいことが確認できた。また、重複度 L を求解領域円内の全ての固有値数以上とする。

4.4 むすび

本章では，Fourier-Bessel 級数の展開次数の上限をの制約を緩めるために，2 つの定式化を示した．同一の相対誤差 10^{-15} では，従来，Type A, Type B では $M_c = 15, 17, 20$ と Type A と Type B では上限の制約を緩めることができ，Type B と従来の定式化の計算時間は同程度であった．打ち切りモード次数 M_c が大きな値では，Type B の定式化の方が分散特性の相対誤差，縮退実効屈折率差 $\text{Re}(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)$ が小さいことを示した．

設定する SSM パラメータのモーメント次数 M は 1 と定めていいことを数値計算結果から示した．

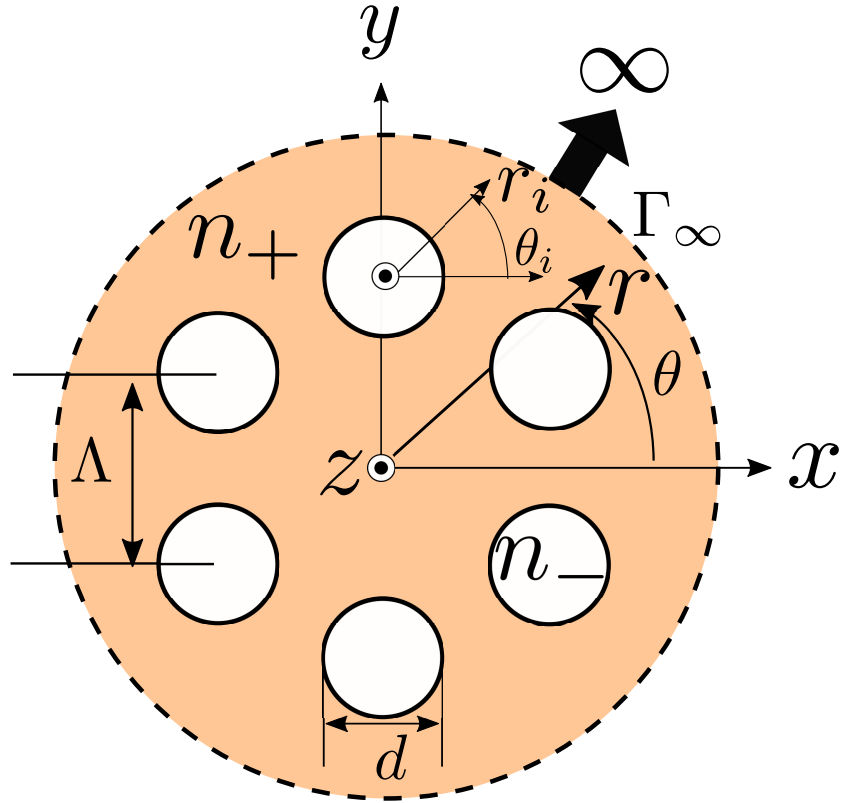


図 4.4 HF の断面

表 4.1 $\gamma/k_0 = 1.439499924701839 + j1.227153828571993 \times 10^{-5}$ における δ_m , $R_{i,m}^{EE}$ の値のモード次数 m 依存性

m	δ_m	$R_{i,m}^{EE}$
5	$-6.73 \times 10^9 - j4.72 \times 10^6$	$-2.10 \times 10^{-6} - j2.44 \times 10^{-3}$
10	$5.99 \times 10^{15} - j7.14 \times 10^{13}$	$8.94 \times 10^{-14} - j8.73 \times 10^{-12}$
15	$-5.59 \times 10^{22} + j1.00 \times 10^{21}$	$1.27 \times 10^{-24} - j7.81 \times 10^{-23}$
20	$1.16 \times 10^{30} - j2.79 \times 10^{28}$	$4.27 \times 10^{-37} - j1.93 \times 10^{-35}$
25	$-3.49 \times 10^{37} + j1.05 \times 10^{36}$	$1.00 \times 10^{-50} - j3.5 \times 10^{-49}$
30	$1.27 \times 10^{45} - j4.57 \times 10^{43}$	$2.90 \times 10^{-65} + j8.61 \times 10^{-64}$

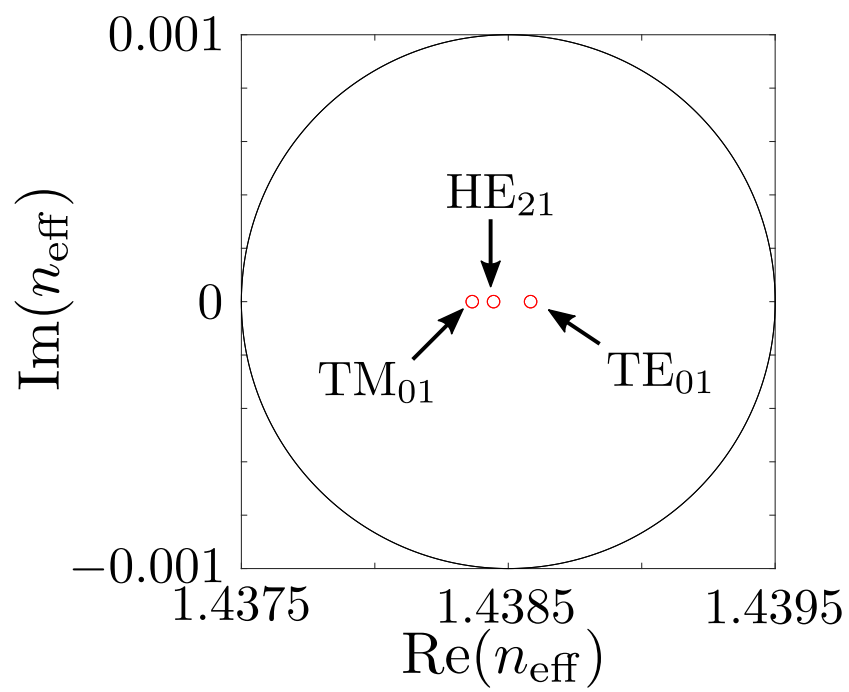
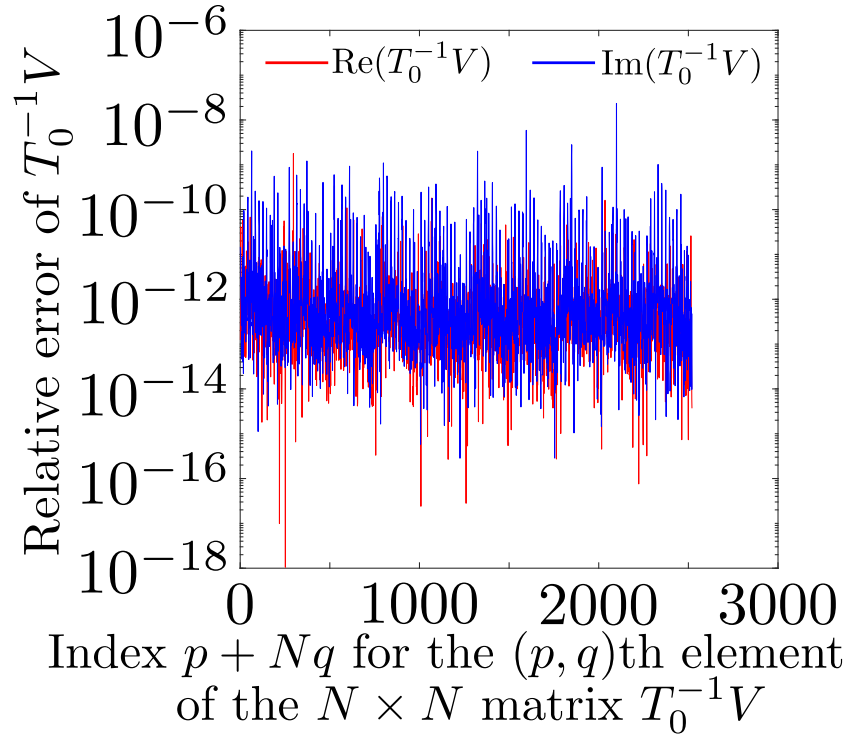
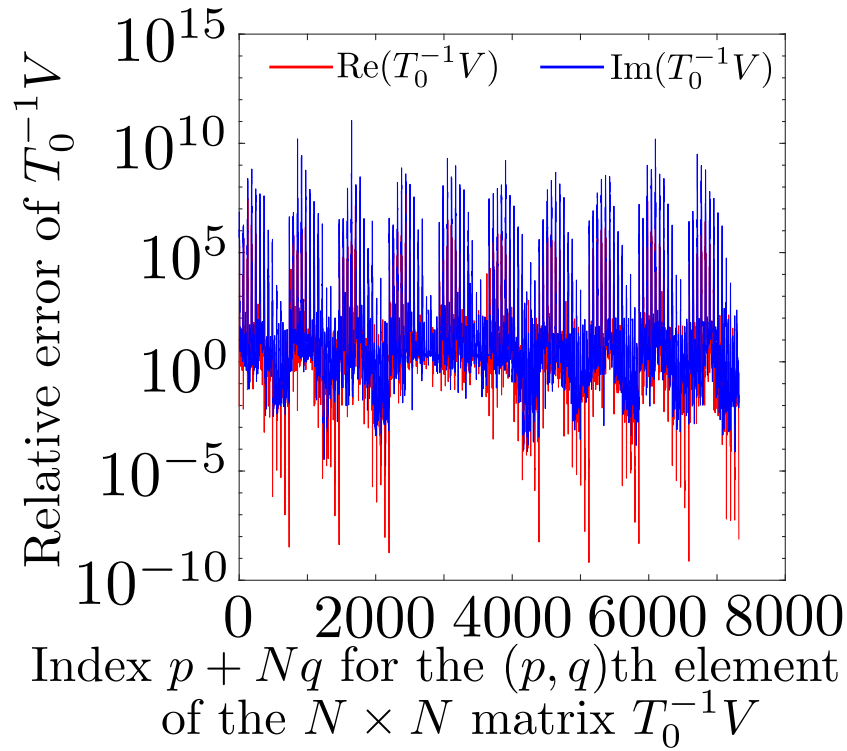


図 4.5 SSM の求解領域と固有値分布



(a)



(b)

図 4.6 従来の定式化 (4.52) の T_0 を用いた $T_0^{-1}V_{(p,q)}$ の相対誤差, (a) $M_c = 10$, (b) $M_c = 30$

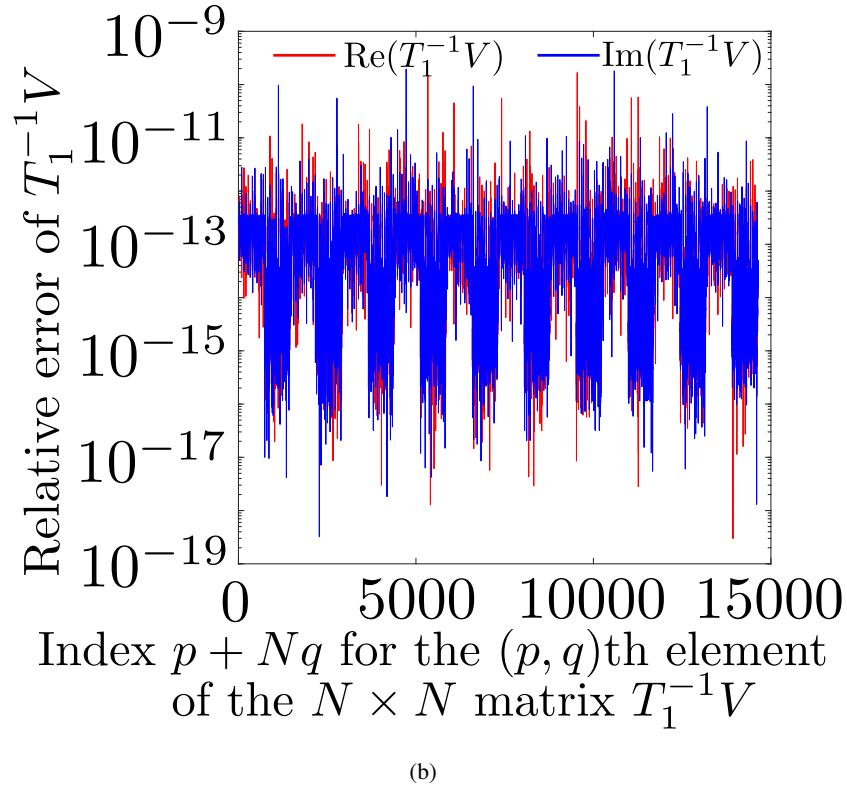
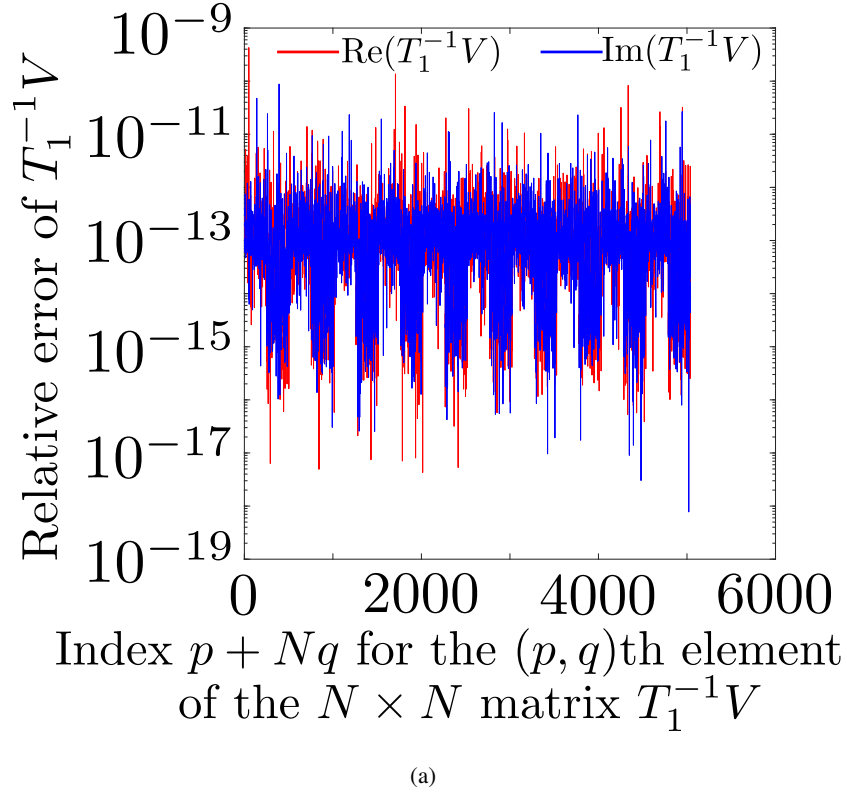
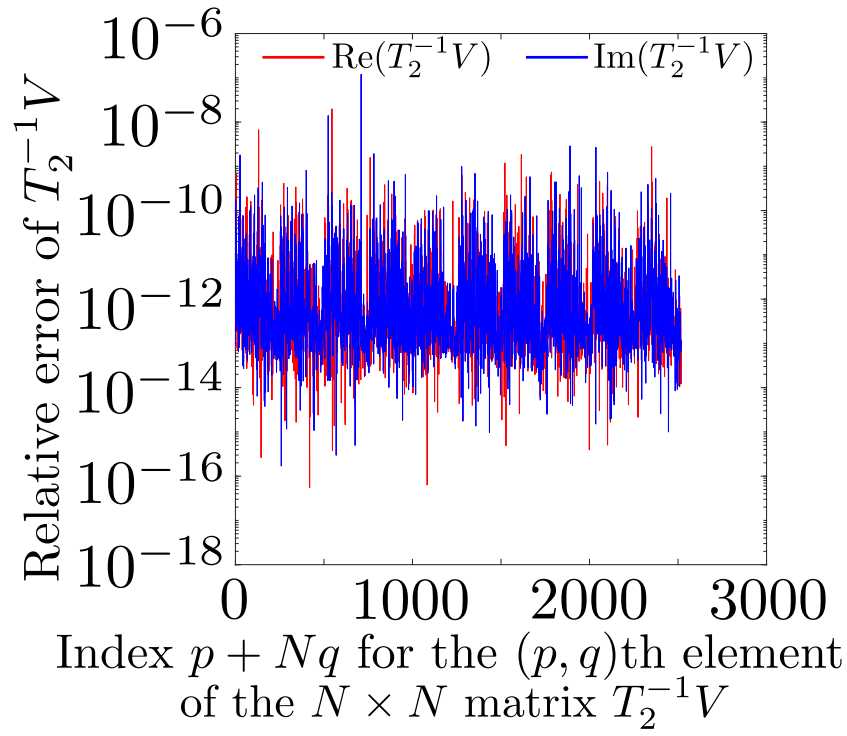
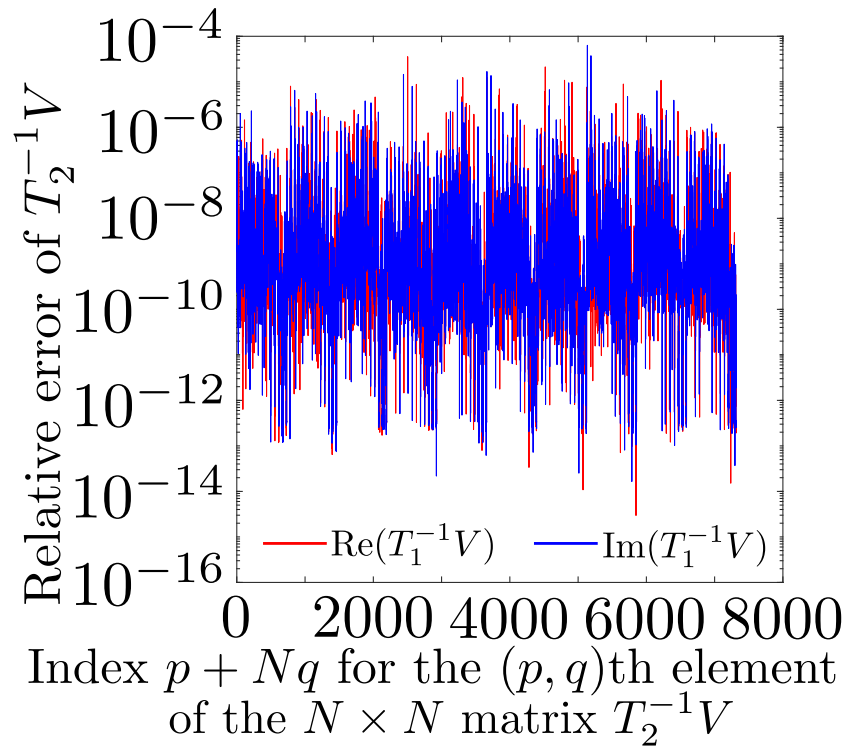


図 4.7 Type A の定式化 (4.56) の T_1 を用いた $T_1^{-1}V_{(p,q)}$ の相対誤差, (a) $M_c = 10$, (b) $M_c = 30$



(a)



(b)

図 4.8 Type B の定式化 (4.59) の T_2 を用いた $T_2^{-1}V_{(p,q)}$ の相対誤差, (a) $M_c = 10$, (b) $M_c = 30$

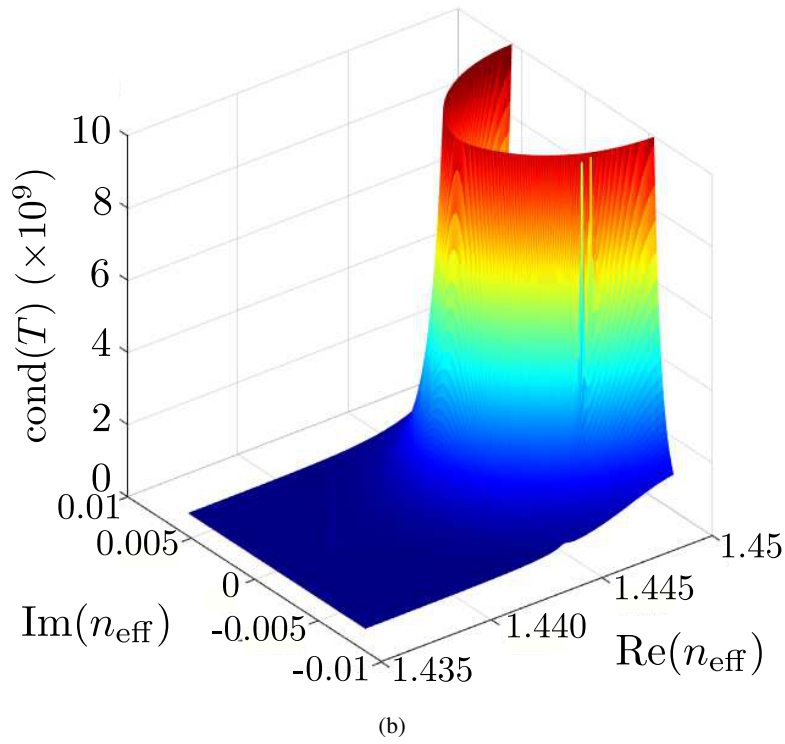
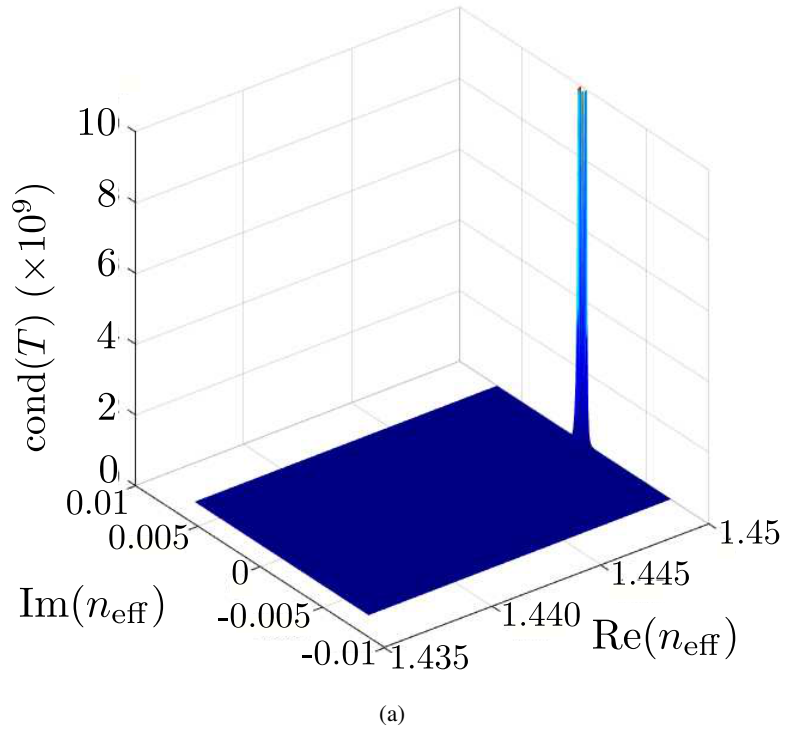
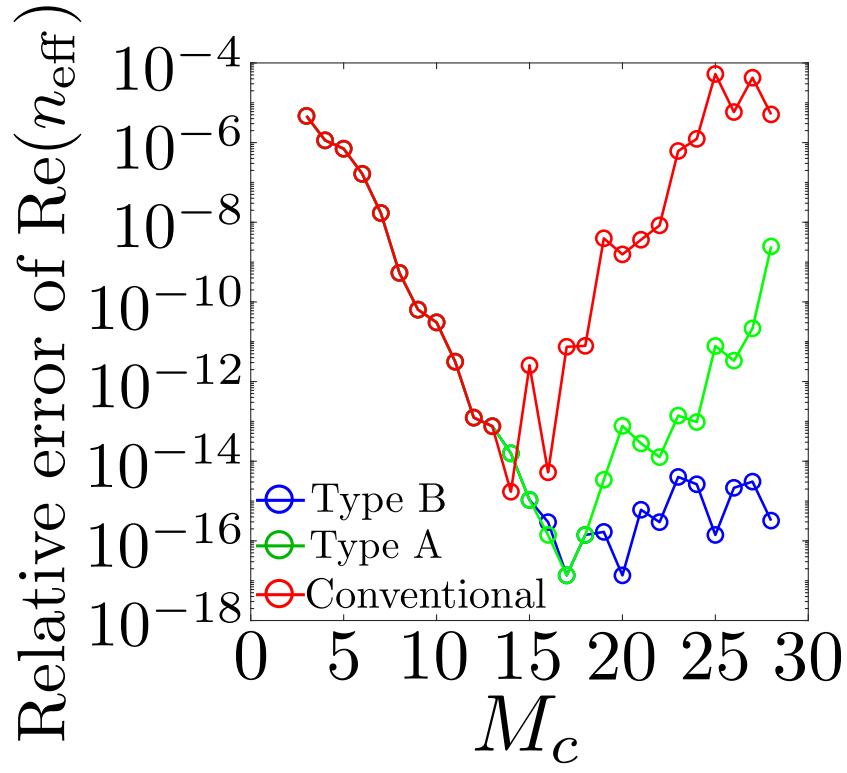
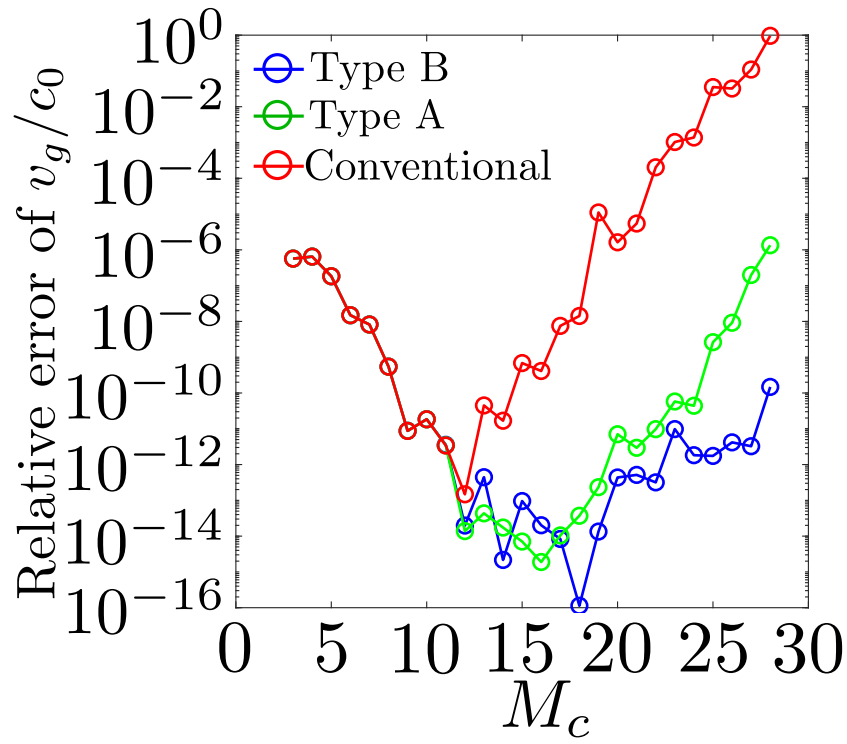


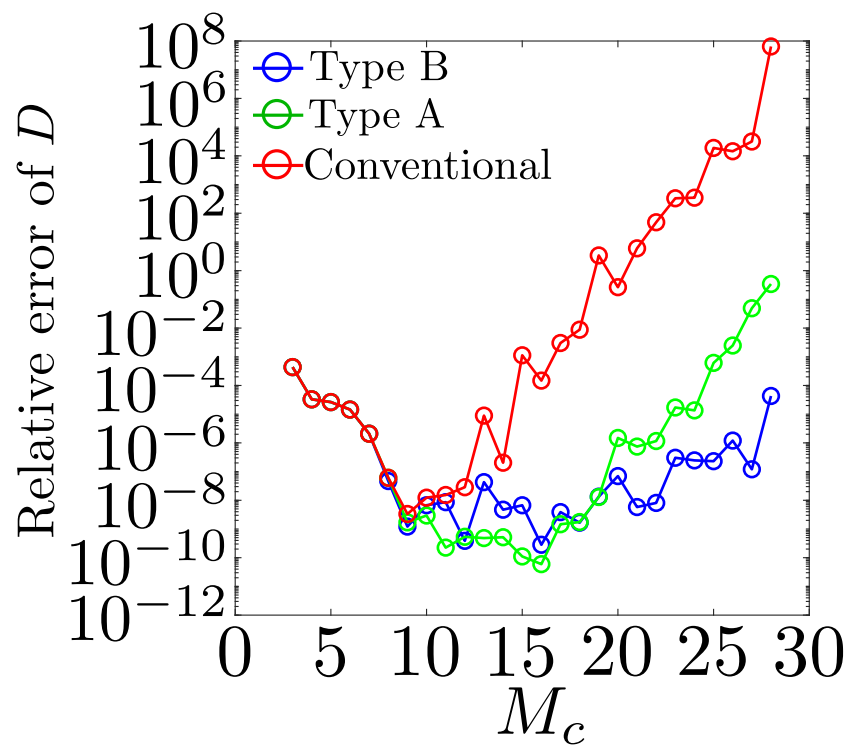
図 4.9 従来の定式化の係数行列 T_0 の条件数の分布 (a) $M_c = 5$ (b) $M_c = 10$



(a)



(b)



(c)

図 4.10 HE_{21}^a モードの分散特性の相対誤差の打ち切りモード次数 M_c 依存性 (a) 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$ (b) 規格化群速度 v_g/c_0 (c) 群速度分散 D

表 4.2 HE₂₁, TM₀₁ モードの分散特性 ($\text{Re}(n_{\text{eff}})$, v_g/c_0 , D) の打ち切りモード次数 M_c 依存性

(a) 実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}})$					
mode	M_c	Conventional	Type B	Type A	Octuple Precision Conventional
TM ₀₁	4	1.438387193748028	1.438387193748028	1.438387193748028	1.43838719374802799700865840041
	6	1.438364999986901	1.438364999986901	1.438364999986901	1.43836499998690139629393365606
	8	1.438364934613164	1.438583649043395	1.438364934613164	1.43836493461316368094556529475
	10	1.438364934181073	1.438583647297220	1.438364934181073	1.43836493418107283137885164629
	12	1.438364934178975	1.438583647292362	1.438364934178975	1.43836493417897547079377689800
	14	1.438364934178885	1.438364934178875	1.438364934178875	1.43836493417887479551474727437
	16	1.438364934179518	1.438364934178874	1.438364934178874	1.43836493417887402104139734136
	18	1.438364934197928	1.438583647291423	1.438364934178873	1.43836493417887399792989631260
	20	1.438364933754672	1.438583647291423	1.438364934178860	1.43836493417887399653833218146
	22	1.438364929149365	1.438364934178874	1.438364934179032	1.43836493417887399652219458322
	24	1.438365172610425	1.438583647291422	1.438364934178256	1.43836493417887399652066780076
	26	1.438562264048777	1.438364934178878	1.438364934098087	1.43836493417887399652063003925
	28	1.438490460449610	1.438364934179089	1.438364934441528	1.43836493417887399652062884552
HE ₂₁	4	1.438446470491446	1.438446470491446	1.438446470491446	1.43844647049144643275816507459
	6	1.438445068014331	1.438445068014331	1.438445068014331	1.43844506801433131515172207770
	8	1.438444832738064	1.438444832738064	1.438444832738064	1.43844483273806413213765338818
	10	1.438444832010716	1.438444832010716	1.438444832010716	1.43844483201071574552902133103
	12	1.438444831966863	1.438444831966862	1.438444831966862	1.43844483196686239190124650796
	14	1.438444831966674	1.438444831966706	1.438444831966706	1.43844483196670559339389816089
	16	1.438444831966811	1.438444831966683	1.438444831966683	1.43844483196668325554699361012
	18	1.438444831975551	1.438444831966683	1.438444831966683	1.43844483196668296531813832842
	20	1.438444829689854	1.438444831966683	1.438444831966839	1.43844483196668295518713025632
	22	1.438444861635297	1.438444831966683	1.438444831966460	1.43844483196668295478623850519
	24	1.438444854236113	1.438444831966681	1.438444831974851	1.43844483196668295477847999215
	26	1.438449252025531	1.438444831966686	1.438444831973295	1.43844483196668295477813476083
	28	1.438316512149390	1.438444831966694	1.438444833059424	1.43844483196668295477822797455

(b) 群速度 v_g/c_0

mode	M_c	Octuple Precision			
		Conventional	Type B	Type A	Conventional
TM ₀₁	4	0.6845749046762910	0.6845749046762818	0.6845749046762885	0.68457490467628963556199
	6	0.6845744737339335	0.6845744737339311	0.6845744737339307	0.68457447373393486592621
	8	0.6845744903993727	0.6845744903993899	0.6845744903993621	0.68457449039936581550457
	10	0.6845744906518925	0.6845744906519320	0.6845744906518894	0.68457449065189027949497
	12	0.6845744906514802	0.6845744906518160	0.6845744906518398	0.68457449065183955234345
	14	0.6845744906528632	0.6845744906519682	0.6845744906519566	0.68457449065195360237052
	16	0.6845744911287632	0.6845744906519651	0.6845744906519489	0.68457449065195247236424
	18	0.6845745349851296	0.6845744906519561	0.6845744906522242	0.68457449065195248935193
	20	0.6845733941274865	0.6845744906519349	0.6845744906486281	0.68457449065195248754583
	22	0.6845757497209808	0.6845744906517756	0.6845744906457760	0.68457449065195248751291
	24	0.6849363749088287	0.6845744906513768	0.6845744912518533	0.68457449065195248751139
	26	0.5120941515726378	0.6845744906463693	0.6845744848251248	0.68457449065195248753456
	28	0.6043059661492498	0.6845744903774384	0.6845754517161154	0.68457449065195248746614
HE ₂₁	4	0.6846250663600247	0.6846250663600215	0.6846250663600281	0.68462506636002591394296
	6	0.6846246129278842	0.6846246129278441	0.6846246129278879	0.68462461292788957592357
	8	0.6846246227751972	0.6846246227751959	0.6846246227752131	0.68462462277520823254432
	10	0.6846246231348998	0.6846246231349103	0.6846246231349106	0.68462462313491054378341
	12	0.6846246231486342	0.6846246231475507	0.6846246231475427	0.68462462314754252841220
	14	0.6846246231316397	0.6846246231475389	0.6846246231475415	0.68462462314753768054404
	16	0.6846246239653580	0.6846246231476586	0.6846246231475487	0.68462462314755001375229
	18	0.6846246270010156	0.6846246231475446	0.6846246231475208	0.68462462314755003067844
	20	0.6846211213726044	0.6846246231475580	0.6846246231461046	0.68462462314755003559771
	22	0.6846188686355857	0.6846246231482204	0.6846246231106569	0.68462462314755003578588
	24	0.6843104741154698	0.6846246231472335	0.6846246211353741	0.68462462314755003578273
	26	0.6927664252071054	0.6846246231404080	0.6846246215793796	0.68462462314755003577531
	28	0.4907190696532507	0.6846246225052850	0.6846246863978677	0.68462462314755003563434

(c) 群速度分散 D

mode	M_c	Octuple Precision			
		Conventinal	Type B	Type A	Conventional
TM ₀₁	4	45.61145527355093	45.61145525933240	45.61145527122423	45.611455268488652297
	6	45.55783633707450	45.55783626214403	45.55783634082676	45.557836329000348037
	8	45.55758399552656	45.55758425255716	45.55758404388638	45.557584028735036661
	10	45.55758155257117	45.55758240108156	45.55758205460524	45.557582033186773373
	12	45.55758321611022	45.55758224485882	45.55758205879037	45.557582047284611800
	14	45.55773737053152	45.55758210190694	45.55758206892001	45.557582047676656849
	16	45.55324802718967	45.55758215230994	45.55758205415089	45.557582047714568418
	18	44.68516529045372	45.55758202178723	45.55758558853399	45.557582047714899219
	20	54.17153844612093	45.55758206940584	45.55750289306454	45.557582047714944418
	22	-45.20135605987367	45.55757878461258	45.55752184300797	45.557582047714945247
	24	-9560.690368554407	45.55757548029111	45.56362658185739	45.557582047714949686
	26	10804390.25747009	45.55750960620834	45.41555514165317	45.557582047714861631
	28	14089194.42154044	45.55409945850004	63.89411042596602	45.557582047717237109
HE ₂₁	4	45.16463734970294	45.16463737147431	45.16463735851579	45.164637377374840077
	6	45.16677786988326	45.16677763046259	45.16677785886799	45.166777878204502370
	8	45.16612718804162	45.16612736450157	45.16612710401537	45.166127130855934069
	10	45.16612454195575	45.16612451287542	45.16612449575112	45.166124519044535585
	12	45.16612067614768	45.16612430524442	45.16612434496157	45.166124365366108874
	14	45.16613824330907	45.16612428879428	45.16612434477505	45.166124365814767905
	16	45.15269611115816	45.16612531113799	45.16612434131036	45.166124365762503955
	18	45.19033237791585	45.16612421798314	45.16612427262317	45.166124365761965318
	20	136.1438708012666	45.16612409789206	45.16610646446746	45.166124365761981777
	22	527.2057331785794	45.16613348642533	45.16563700745658	45.166124365761979942
	24	7453.116095592150	45.16611203704051	45.13459285814849	45.166124365762018396
	26	-1067191.235280158	45.16603749185467	45.12100617897731	45.166124365762259654
	28	14952862.79329971	45.15989180028310	45.93473927707455	45.166124365768806555

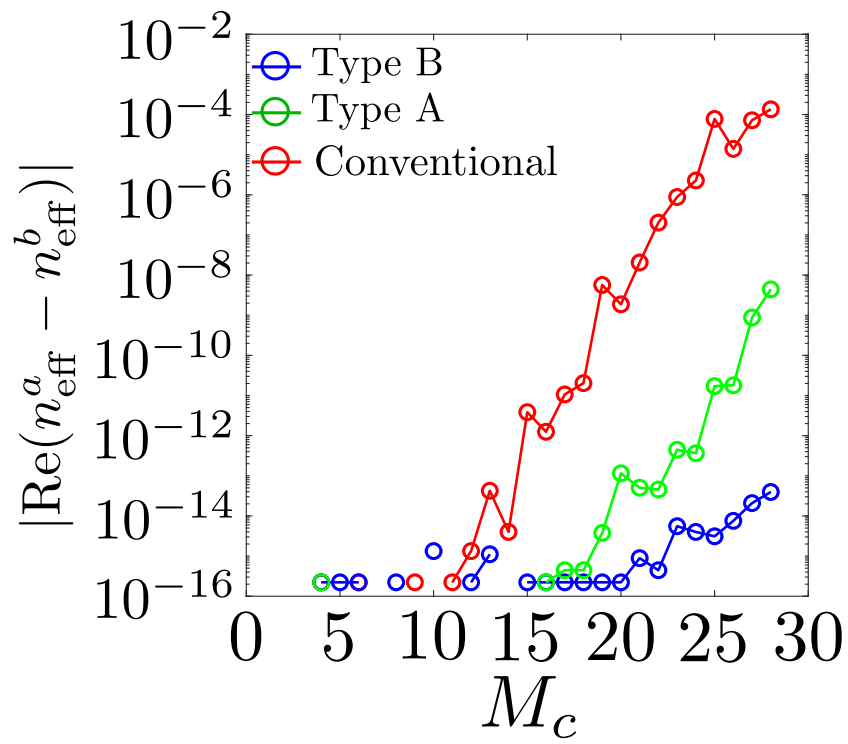


図 4.11 HE₂₁ モードの実効屈折率の実部の差 $|Re(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)|$ の打ち切りモード次数 M_c 依存性

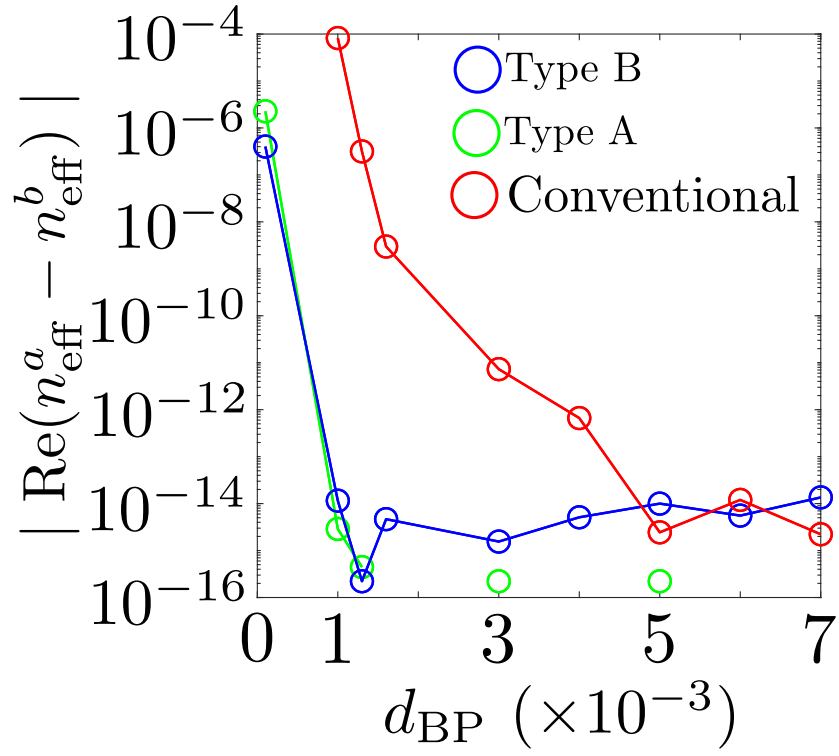


図 4.12 HE₂₁ モードの縮退実効屈折率差 $|Re(n_{eff}^a - n_{eff}^b)|$ の d_{BP} 依存性

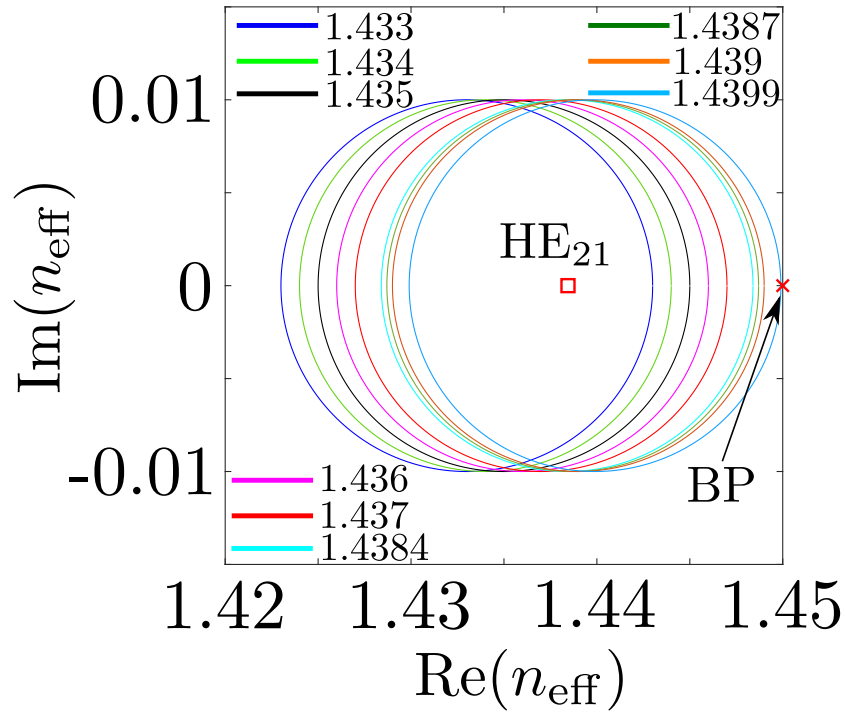


図 4.13 HE₂₁ モードの実効屈折率 n_{eff}^a 分布と SSM の積分路

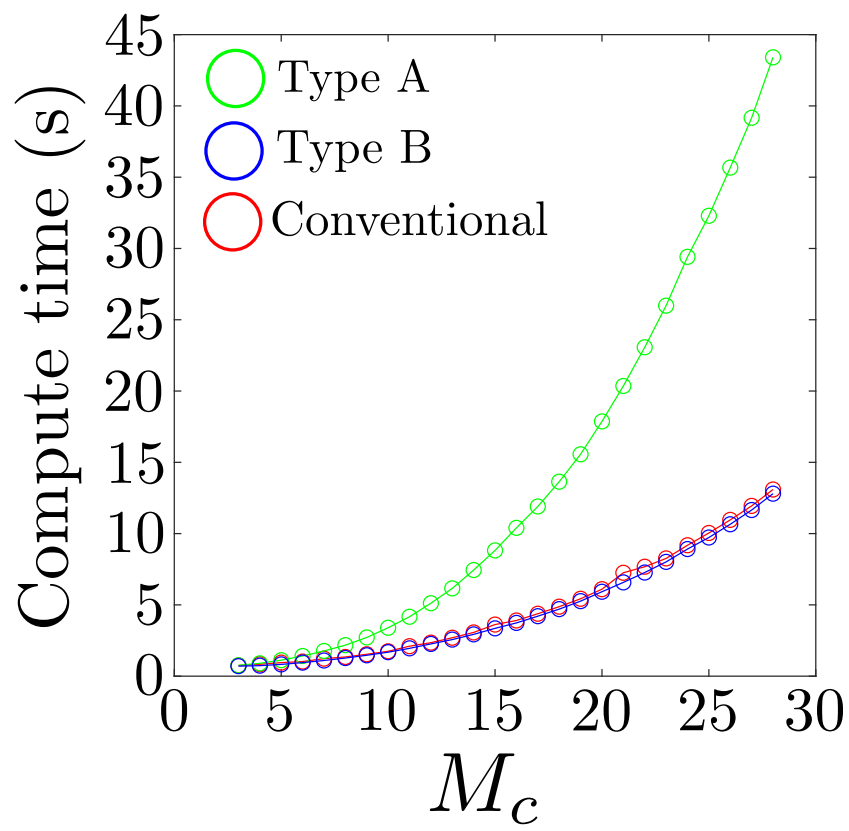


図 4.14 計算時間の打ち切りモード次数 M_c 依存性

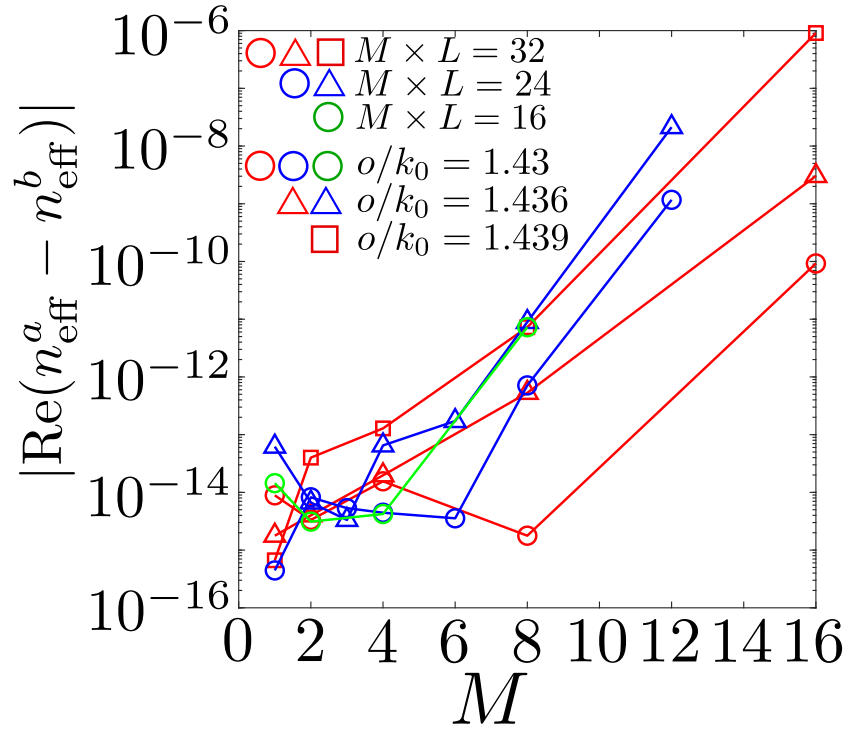


図 4.15 HE₂₁ モードの縮退実効屈折率差 $|\text{Re}(n_{\text{eff}}^a - n_{\text{eff}}^b)|$ のモーメント次数 M 依存性

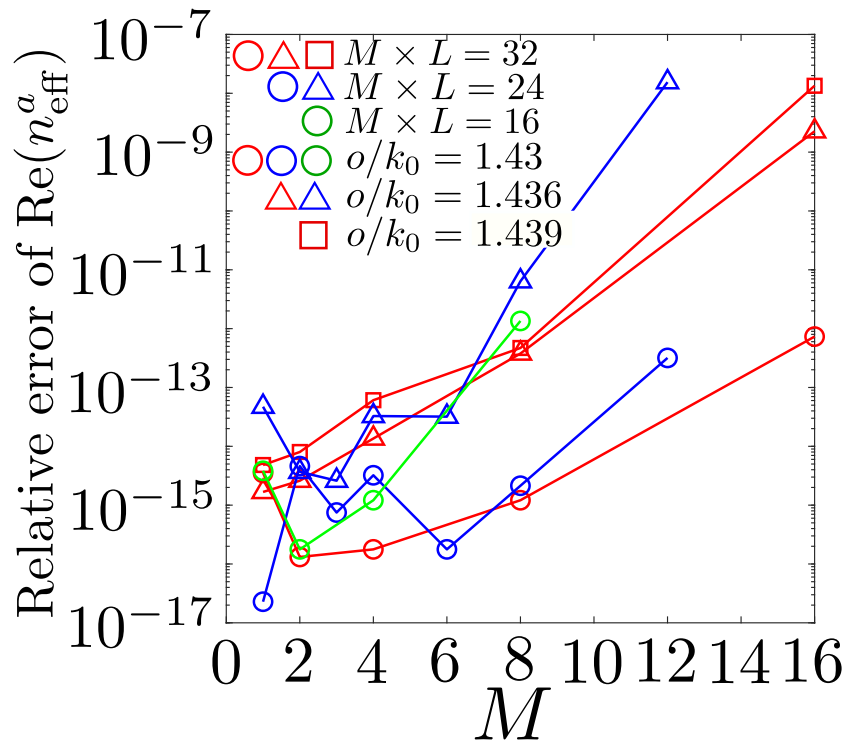


図 4.16 HE₂₁ モードの縮退実効屈折率の実部 $\text{Re}(n_{\text{eff}}^a)$ の相対誤差のモーメント次数 M 依存性

5 ハイブリッドトレフツ有限要素法に基づく解析法

5.1 まえがき

複雑な断面構造の光ファイバの設計には、有限要素法 (Finite element method:FEM) や有限差分時間領域法、Trefftz 法が用いられる。数値計算手法の一つである FEM は、解析領域内を有限要素で分割する。開領域を模擬するためには、電磁界を波動関数で展開したものを接続したり [79], 吸収境界条件や擬似吸収材料を用いて閉領域化する [29–31,80]。FEM 解析で用いられる擬似吸収体の一つに完全整合層 (Perfectly matched layer:PML) [29–31] があるが、PML の最適なパラメータを決定するのは難しく、経験的に定めている。

ハイブリッドトレフツ有限要素法 [81,82] は、プレート曲げ問題などの力学の問題 [19,83] やポアソン問題 [85], ポテンシャル問題 [19,83,84] に適用されている。要素 [19,83,85] 境界上に定義するフレーム界と、要素内の補間界との差を汎関数に考慮することで、要素間の界の連続性を緩和する。Oyamada と Okoshi [79] は、波動関数と有限要素を、要素辺上に節点を配置し、Collocation method で接続した。境界条件は、節点上でのみ課されており、不連続によるエネルギー流は、汎関数に組み込まれていない。Gyimesi, Tsukerman, Lavers [84] のように有限要素で、フレーム界を近似し、不連続に起因するエネルギー流の最小化を汎関数に課するのが Trefftz 要素である。支配方程式と放射条件を満足する補間関数とすると、無限領域の取り扱いが可能である。したがって、PML や吸収境界条件が不要となる。FEM-PML では PML 領域も有限要素で分割する必要があるが、HTFEM では、Trefftz 要素で分割するために、無限領域の未知量を追加する必要が無いので、最終的に帰着する固有値問題の次数が小さくなる。光ファイバ断面内の不均質領域を通常の有限要素で分割し、コアやクラッドの均質領域を Trefftz 要素で分割することで、複雑な構造を有している導波路にも HTFEM は適用可能である。

しかしながら、従来の FEM による固有モード解析は一般化固有値問題に帰着するが、HTFEM では非線形固有値問題 (Nonlinear eigenvalue problem:NEP) に帰着する。Sakurai-Sugiura 法 (SSM) は、複素平面上に指定した領域内の縮退固有値も含めた全ての固有値を高精度に計算することができるため、Sakurai-Sugiura 法 (SSM) を用いて多層導波路やホーリーファイバの固有モード解析を行ってきた [45,86]。

本章では、光ファイバの固有モード解析における HTFEM の定式化について述べ、Step-index fiber と Holey fiber の数値解析例から、その妥当性と有用性を示す。Step-index fiber では、解析解と比較し、HTFEM 解析の妥当性を確認した。Holey fiber では、従来の FEM や Multipole Method と解析結果を比較し、HTFEM 解析の妥当性を示した。

5.2 HTFEM の定式化

図 5.1 に示すような, z 方向に一様で無限に長い光導波路断面を考える. ここに, 円盤領域 $\Omega_{t,1}(r \leq r_1)$, 円環領域 $\Omega_c(r_1 \leq r \leq r_2)$, 無限領域 $\Omega_{t,2}(r_2 \leq r)$ の屈折率を定数 $n_{t,1}$, $n_c(x,y)$, $n_{t,2}$ とする. 領域の境界 $r = r_1$, $r = r_2$ を, それぞれ, 境界 Γ_1 , Γ_2 とする. 単一角周波数 ω で振動し, z 方向に伝搬する電磁界 $\Psi(x,y,z,t)$ は,

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y)e^{-j\gamma z}e^{j\omega t} \quad (5.1)$$

と表せる. ここで, Ψ は電界ベクトル \mathbf{E} もしくは磁界ベクトル \mathbf{H} , $\gamma = \beta - j\alpha$ は複素伝搬定数で実部 β は位相定数, 虚部 α は減衰定数である. 電磁界は波動方程式,

$$\nabla \times (\nabla \times \Psi) - k_0^2 n(x,y)^2 \Psi = 0, \quad (5.2)$$

を満たす. ここで, k_0 は真空中の波数, n は屈折率である.

5.2.1 変分表現

境界 Γ_1 , Γ_2 上で連続条件を緩和する変分原理の汎関数は, 無限遠方での放射条件を満足する試行関数と試験関数を用いると,

$$I_a = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{E}^t) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 n(x,y)^2 \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}\} dx dy + j\omega\mu \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \{(\mathbf{E}^t - \tilde{\mathbf{E}}^t) \times \mathbf{H}\} \cdot \hat{n} ds, \quad (5.3)$$

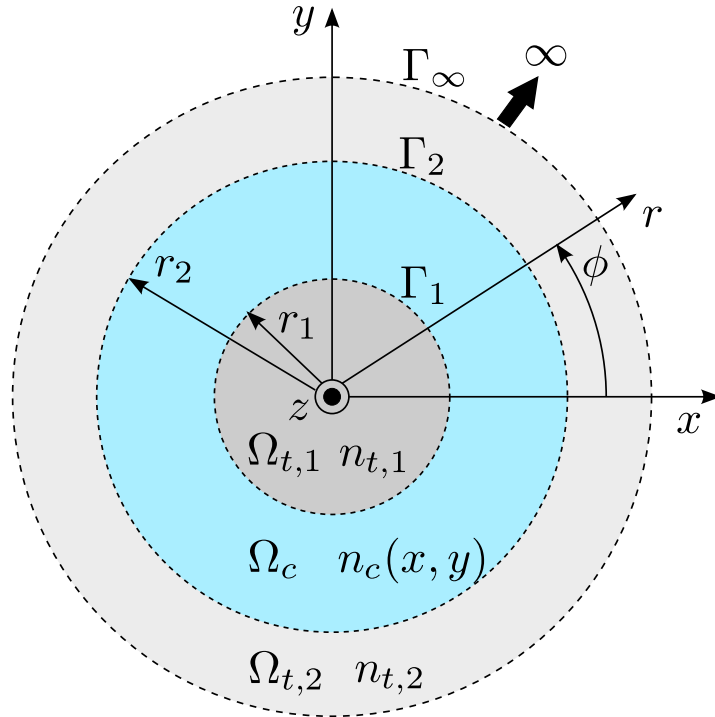


図 5.1 光導波路断面構造

である。ここで、 μ は透磁率、 $\Omega = \Omega_{t,1} \cup \Omega_c \cup \Omega_{t,2}$ は断面の全領域、 \hat{n} は外向き単位法線ベクトル、上添字 t はトランスポート界 [87] を表し、 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} はそれぞれの領域の内部電磁界、 $\tilde{\mathbf{E}}^t$ は境界上のフレーム界である。

(5.3) の第 1 項目は導波路問題の通常の流れ関数、第 2 項が各領域の境界上で界の連続性を緩和する項である。この項は、連続条件を課した境界上で電力を保存するための弱形式となっている。

領域 Ω_c は不均質領域であるため、従来のエッジ節点要素に分割する。この要素内の、電界 \mathbf{E} を、多項式関数で補間する、

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{N}_t\}^T \{E_t\} + \{N_z\} \{E_z\} \hat{z}. \quad (5.4)$$

ここで、上添字 T は転置した列ベクトル、 $\{\mathbf{N}_t\}$ はエッジ要素のベクトル形状関数からなる列ベクトル、 $\{N_z\}$ は節点要素のスカラー形状関数からなる列ベクトル、 \hat{z} は z 方向の単位ベクトル、 $\{E_t\}$ と $\{E_z\}$ はそれぞれ離散化した電界の横方向成分と縦方向成分からなる列ベクトルである。領域 $\Omega_{t,1}$ 、 $\Omega_{t,2}$ は、均質一様領域なので、Trefftz 要素で分割する。電磁界の補間関数として (5.2) の波動方程式を満たす関数を採用する、境界 Γ_1 、 Γ_2 をエッジ節点線要素で分割すると、線要素上のフレーム界 $\tilde{\mathbf{E}}$ は多項式関数で補間され、

$$\tilde{\mathbf{E}} = \{\tilde{\mathbf{N}}_t\}^T \{\tilde{E}_t\} + \{\tilde{N}_z\}^T \{\tilde{E}_z\} \hat{z}. \quad (5.5)$$

Trefftz 要素の流れ関数は、(5.3) の第 1 項の $\Omega_{t,i}$ の領域積分を境界 Γ_i 上の境界積分に書き換えると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{t,i}} \{(\nabla \times \mathbf{E}^t) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 n^2 \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}\} d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{t,i}} \nabla \cdot \{\mathbf{E}^t \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \\ & \quad + \mathbf{E}^t \cdot \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 n_{t,i}^2 \mathbf{E}\} d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Gamma_{t,i}} \{\mathbf{E}^t \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \hat{n} ds. \end{aligned} \quad (5.6)$$

なので、

$$I_{t,j} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{t,i}} \{\mathbf{E}^t \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \hat{n} ds + \int_{\Gamma_{t,i}} \{\tilde{\mathbf{E}}^t \times (\nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \hat{n} ds, \quad (5.7)$$

となる。ここに、Trefftz 要素内の補間関数は波動方程式 (5.2) を満足する波動関数を用いた。

結局、導波路断面に関する流れ関数は、

$$I_a = I_c + \sum_{i=1}^2 I_{t,i}, \quad (5.8)$$

$$I_c = \iint_{\Omega_c} \{(\nabla \times \mathbf{E}^t) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 n_c^2 \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}\} d\Omega, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} I_{t,i} &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{E}^t \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}^t)\} \cdot \hat{n} ds \\ & \quad + \int_{\Gamma_i} \{\tilde{\mathbf{E}}^t \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \tilde{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^t)\} \cdot \hat{n} ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

である。

5.2.2 HTFEM の非線形固有値問題の定式化

汎関数 (5.8) を有限要素法で近似計算する．

領域 Ω_c の FEM 行列表式 (5.9) を近似計算する．領域 Ω_c は従来のエッジ節点要素で分割し，(5.4) から FEM 行列を得る．次に，領域 $\Omega_{t,1}$, $\Omega_{t,2}$ の HTFEM 行列表式 (5.10) を考える．図 5.1 に示した円柱座標系の波動関数展開により，領域 $\Omega_{t,i}(i = 1, 2)$ 中の電磁界の縦方向成分を，

$$E_{z,i} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} A_{m,i} F_{m,i}(r, \phi) \exp(-j\gamma z), \quad (5.11)$$

$$H_{z,i} = \sum_{m=-M_c}^{M_c} B_{m,i} F_{m,i}(r, \phi) \exp(-j\gamma z), \quad (5.12)$$

と近似する．ここで， M_c は打ち切り次数， $F_{m,i}(r, \phi)$ は，

$$\begin{aligned} F_{m,i}(r, \phi) &= f_{m,i}(\kappa_i r) \exp(jm\phi), \\ f_{m,1}(\kappa_1 r) &= J_m(\kappa_1 r), \\ f_{m,2}(\kappa_2 r) &= H_m^{(2)}(\kappa_2 r) \end{aligned} \quad (5.13)$$

であり， $J_m(\kappa_1 r)$ は m 次の第 1 種ベッセル関数， $H_m^{(2)}$ は m 次の第 2 種ハンケル関数， $\kappa_i^2 = (k_0^2 n_{t,i}^2 - \gamma^2)$ である．断面内成分 $E_{r,i}$, $E_{\phi,i}$ は，縦方向成分により，

$$E_{r,i} = -\frac{j}{\kappa_i^2} \left(\gamma \frac{\partial E_{z,i}}{\partial r} - \frac{k_0 Z_0}{r} \frac{\partial H_{z,i}}{\partial \phi} \right), \quad (5.14)$$

$$E_{\phi,i} = -\frac{j}{\kappa_i^2} \left(\gamma \frac{\partial E_{z,i}}{\partial \phi} - k_0 Z_0 \frac{\partial H_{z,i}}{\partial r} \right), \quad (5.15)$$

と表される．ここで， Z_0 は真空中を伝搬する平面波の特性インピーダンスである．円である境界 Γ_i 上のフレーム界は，接線成分が ϕ なので，

$$\tilde{\mathbf{E}} = \{\tilde{N}_\phi\}^T \{\tilde{E}_\phi\} \hat{\phi} + \{\tilde{N}_z\}^T \{\tilde{E}_z\} \hat{z}, \quad (5.16)$$

と近似する．ここで， $\hat{\phi}$ は ϕ 方向の単位ベクトルである．(5.11)~(5.16) を (5.10) に代入すると，

$$I_{t,i} = \{C_i\}' [G_i] \{C_i\} + \{\tilde{E}_i\}' [L_i] \{C_i\} + \{C_i\}' [L_i]' \{\tilde{E}_i\}, \quad (5.17)$$

を得る．

ここで, $\{C_i\}$, $\{\tilde{E}_i\}$, 対角行列 $[G_i] \in \mathbb{C}^{M \times M}$, 行列 $[L_i] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ は,

$$\{C_i\} = \begin{bmatrix} \{A_{m,i}\} \\ \{B_{m,i}\} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\{\tilde{E}_i\} = \begin{bmatrix} \{\tilde{E}_{\phi,i}\} \\ \{\tilde{E}_{z,i}\} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$[G_i] = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] \\ [0] & [G_{22}] \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

であり, $M = 2(2M_c + 1)$, N は境界 Γ_i 上の離散化した電界の E_ϕ , E_z 成分の個数である. (5.20) の小行列 $[G_{11}]$, $[G_{22}]$ の対角要素 $g_{11,p}$, $g_{22,p}$ は $m = -M_c, -M_c + 1, \dots, M_c - 1, M_c$, 下添え字 p は対角行列の p 行 p 列の要素 ($p = 1, 2, \dots, 2M_c + 1$) とすると,

$$g_{11,p} = s_i \frac{2\pi r_i k_0^2 n_{t,i}^2}{\kappa_i} f_{m,i}^*(\kappa_i r_i) \left. \frac{\partial f_{m,i}(\kappa_i r)}{\partial(\kappa_i r)} \right|_{r=r_i}, \quad (5.22)$$

$$g_{22,p} = -s_i g_{11,p} \frac{Z_0^2}{n_{t,i}^2}, \quad (5.23)$$

である. ここで, $s_1 = -1$, $s_2 = 1$, 上添字 $*$ は複素共役を表している. (5.21) の小行列 $[L_{12}]$, $[L_{22}]$ は,

$$[L_{12}] = \sum_e \int_{\Gamma_i} \{\tilde{N}_\phi\} \{l_{12,p}\}^T ds, \quad (5.24)$$

$$[L_{21}] = \sum_e \int_{\Gamma_i} \{\tilde{N}_z\} \{l_{21,p}\}^T ds, \quad (5.25)$$

$$[L_{22}] = \sum_e \int_{\Gamma_i} \{\tilde{N}_z\} \{l_{22,p}\}^T ds, \quad (5.26)$$

である. ここで, \sum_e は境界 Γ_i 上の線要素の重ね合わせ, 列ベクトル $\{l_{12,p}\}^T$, $\{l_{21,p}\}^T$, $\{l_{22,p}\}^T$ の p 番目の要素は,

$$l_{12,p} = s_i j k_0 Z_0 F_{m,i}(r_i, \phi), \quad (5.27)$$

$$l_{21,p} = s_i \frac{k_0^2 n_{t,i}^2}{\kappa_i} \left. \frac{\partial F_{m,i}(r, \phi)}{\partial(\kappa_i r)} \right|_{r=r_i}, \quad (5.28)$$

$$l_{22,p} = s_i \frac{j k_0 Z_0 m \gamma}{\kappa_i^2 r_i} F_{m,i}(r_i, \phi), \quad (5.29)$$

である. (5.17) を未知展開係数ベクトル $\{C_i\}^t$ と $\{C_i\}$ について, 変分を取り, 得られた関係式を用いると, (5.17) は,

$$I_{t,i} = -\{\tilde{E}_i\}^t [L_i] [G_i]^{-1} [L_i]^t \{\tilde{E}_i\}, \quad (5.30)$$

となる.

それぞれの領域の汎関数の寄与を重ね合わせ，電界ベクトル $\{E_i\}^t$, $\{E_i\}$ について変分をとると，行列方程式，

$$[T(\gamma)]\{E\} = \{0\}, \quad (5.31)$$

を得る．(5.31) は固有値を γ ，固有ベクトルを $\{E\}$ とした非線形固有値問題である． $\{E\}$ は，領域 Ω_c 中の全てのエッジ節点要素の離散化電界ベクトル $\{E_\phi\}$, $\{E_z\}$ からなる．非線形固有値問題 (5.31) は SSM [37–40,45] を用いて解く．

5.3 数値計算例

本節では、Step index fiber(SIF), 円状空孔を有する HF と 3 つの環状空孔を持つ HF, 楕円状空孔を有する HF に、HTEFEM の適用する. 一様領域 $\Omega_{t,1}$ と $\Omega_{t,2}$ をそれぞれ Trefftz 要素 1 個で分割し, 不均質領域 Ω_c は有限要素で分割した. 数値計算は, Multipole Method は C ++, HTFEM は MATLAB を用いた.

5.3.1 Step Index Fiber

図 5.2 に示すような Step index fiber を考える. $r_1 = r_2 = 10 \mu\text{m}$, 屈折率 $n_{t,1} = 1.444$, $n_{t,2} = 1.441$, 波長 $\lambda = 2\pi/k_0 = 1.55 \mu\text{m}$ である.

表 5.1 に, HE_{11} モードの実効屈折率 n_{eff} の M_c 依存性を示す. HE_{11} モードは 2 重縮退の導波モードであり, 実効屈折率の虚部は原理的には零となる. $M_c = D_f$ のとき, 実効屈折率が解析解と一致している. $M_c = 152$ では, ハンケル関数 $H_m^{(2)}(\kappa_2 r_1)$ の値が倍精度浮動小数点数の表現の上限よりも大きな値となるため計算精度が低下している. 表 5.2 に, HE_{11} モードの実効屈折率の D_f 依存性を示す. $M_c = D_f$ とした. 実効屈折率は $D_f = 16$ で収束しており, 解析解と一致している. 倍精度演算では $D_f = M_c > 96$ で精度が低下する. これは, 4 倍精度演算による実効屈折率は解析解と一致しているおり, 高次ハンケル関数値の計算でオーバーフローが原因である.

以上まとめると, $D_f = M_c$ とすることで, HTFEM 解析が高精度で行えることが, 空間高調波の打ち切り次数 M_c を大きくしすぎると, ハンケル関数値が不正確となり解析精度が低下する.

5.3.2 円柱の空孔を有する Holey fiber

図 5.3 に示すような, 部材が無限に広がっている空間に, 円柱空孔が六角形状に配置され, 六角形の数 N_R , 空孔の数を $N_c = 3N_R(N_R + 1)$ とした HF を考える. ここで, 空孔の直径 $d = 5 \mu\text{m}$, 空孔間距離 $\Lambda = 1.35d$, 距離 $r_1 = 0.8d$, 距離 $r_2 = (0.6 + 1.4N_R)d$, 部材の屈折率 $n_s = n_{t,1} = n_{t,2} = 1.45$, 空孔の屈折率 $n_0 = 1$, 波長 $\lambda = 1.45 \mu\text{m}$ とした. HTFEM の領域 Ω_c は 9 節点 12 辺のエッジ節点長方形要素で分割する. FEM-TBC [80] は, $r = r_3$ の境界 Γ_3 に透明境界条件を課した.

表 5.3 に, HE_{11} モードの実効屈折率の自由度数 (Degrees of freedom:DOF) 依存性を示す. ここで, D_e は領域 Ω_c 中のエッジ節点長方形要素数であり, $M_c = D_f$ である. 実効屈折率の実部と虚部の値は, $D_f \geq 72$ でそれぞれ, 8 桁, 10 桁一致する.

表 5.4 は, 実効屈折率の空孔層数 N_R 依存性を調べたものである. HTFEM では $M_c = D_f = 72$, $D_e = 4320$ とした. DOF は 52128 である. MM の Fourier-Bessel 級数の展開次数は -16 から 16 までとした. Uranus と Hoekstra [80] による FEM-TBC では, $r_3 = 10 \mu\text{m}$ の円上に TBC を課し, 対称境界条件を適用して, 半径 $r = 10 \mu\text{m}$ の 4 分の 1 の解析領域で, 1648 個の三角形要素で計算したものである. $N_R = 1$ での HTFEM の結果は, FEM-TBC, MM の誤報と一致している. $N_R = 1$, 2, 3 と増やすと伝搬損失は小さくなっているのは, N_R を増やすことで電磁界のエネルギーが外部に漏れないようになっていくためである.

図 5.4 に，実効屈折率の波長依存性を示す．部材の屈折率 n_s は，純シリカの Sellmeier's 方程式 [88] から計算した．縮退モードの HE_{11} ， HE_{21} ， EH_{11} モードでは，実効屈折率の実部の大きい方を上添字 a，小さい方を b とした．閉じ込め損失の計算式は，

$$L = \frac{20}{\ln(10)} \frac{2\pi}{\lambda} \text{Im}(-n_{\text{eff}}) \times 10^{-2} \quad (\text{dB/cm}), \quad (5.32)$$

である．実効屈折率の HTFEM による計算結果は，FEM-TBC [80] のものと一致するが，閉じ込め損失はわずかに異なっている．

5.3.3 環状型 Holey fiber

図 5.5 に示すような環状空孔を有する Holey fiber を考える [80, 89, 90]．ここで， $r_1 = 1 \mu\text{m}$ ， $r_2 = 2 \mu\text{m}$ ，角度 $\theta_v = 108 \text{ deg}$ として，3 回対称性を有するように配置した．部材の屈折率 $n_s = n_{t,1} = n_{t,2} = 1.44402362$ ，空孔の屈折率 $n_0 = 1$ とし，動作波長 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ である．表 5.5 に，実効屈折率の計算結果を示す．HTFEM の計算では， $M_c = D_f = 120$ とし，領域 $r_1 \leq r \leq r_2$ をエッジ節点要素で 1800 分割した．DOF は 22080 である．FEM-PML の計算では，領域 $r_3 \leq r \leq r_4$ 中は円柱座標系の PML として， $r = r_4$ を完全導体 (Perfect electrical conductor: PEC) とし閉領域化する．FEM-PML の計算は，COMSOL MultiPhysics で行い，対称境界条件を課し解析領域を半径 $r_4 = 5 \mu\text{m}$ の半円とし，エッジ節点 4 角形 2 次要素で 4375 分割した．PML のストレッチング関数は，

$$f_q(r) = s \left(\frac{r - r_3}{t_{\text{PML}}} \right)^q (1 - j), \quad (5.33)$$

であり， r 方向の座標変換は，

$$d_s = \lambda f_q(r) - (r - r_3), \quad (5.34)$$

である．ここで，スケーリング因子 $s = 2$ ，曲率パラメータ $q = 1$ ，半径 $r_3 = 2.5 \mu\text{m}$ ，PML 厚み $t_{\text{PML}} = 2.5 \mu\text{m}$ とした．FEM-TBC [80] の計算結果は，半径 $r_3 = 2.5 \mu\text{m}$ の半円を解析対象として，三角形要素で 1937 分割した．HTFEM，FEM-PML，FEM-TBC の結果は，小数点以下 4 桁一致している． HE_{11} ， HE_{21} モードの，HTFEM の結果は，対称条件を適用せずに，他の 2 つの方法よりも少ない要素数で 10 桁一致している．これは，HTFEM では均質なコア領域 $\Omega_{t,1}$ に Trefftz 要素を適用しているのので，要素分割の非対称性の影響を受けないためである．表 5.6 に計算時間を示す．計算時間は， HE_{11} モードを，それぞれ 10 回計算した平均値とし，SSM のパラメータ，中心 $o/k_0 = 1.355$ ，半径 $\rho/k_0 = 0.015$ ，標本点数 $N_s = 16$ ， $L = 8$ ， $M = 1$ とした．FEM-PML の計算には Comsol multiphysics を用いて，アダプティブメッシュの，最大反復回数を 2 とした．FEM-PML の方が計算時間が HTFEM よりも短い．ここでは，HTFEM に対称条件を課さなかったが，対称条件を課すことで，計算時間は短くなる．計算時間は，CPU が Intel Xenon Gold 6140 2.3 GHz，主記憶容量が 96 GB の計算機を使用して調べた．

5.3.4 楕円状と円状の空孔を有する Holey fiber

図 5.6 に示すような楕円と円の空孔が六方格子状に配置されている Holey fiber を考える．ここで，円の直径 $d = 5 \mu\text{m}$ ，楕円の短径 $a = d$ ，長径 $b = 1.4d$ ，中心間隔 $\Lambda = 1.35d$ とし， $r_1 = 0.8d$ ， $r_2 = 3.4d$ ，空孔の屈折率 $n_0 = 1$ ，部材を純シリカとして屈折率 $n_s = n_{t,1} = n_{t,2}$ は Sellmeier 方程式 [88] で計算した．HTFEM は， $M_c = D_f = 72$ ，領域 Ω_c はエッジ節点 4 角形要素で 7896 分割した．DOF は 95040 である．

図 5.7 は実効屈折率の波長依存性をまとめたものである．実部は，円空孔 Holey fiber の値と一致している．閉じ込め損失は，円空孔 Holey fiber よりも小さくなっている．これは，楕円空孔が 2 層目に，適切な傾きで配置されているため，電磁界が外側に漏れにくい構造となったと考えられる．なお，閉じ込め損失は，実効屈折率の虚部の絶対値が 10^{-20} より小さい場合，プロットしていない．

5.4 むすび

本章では，光ファイバの固有モード解析における HTFEM の定式化を示し，Step-index fiber と Holey fiber を解析対象として均質領域に Trefftz 要素を用いて解析を行った．従来の FEM よりも有限要素で分割する領域を減らせ，MM や FEM の結果と同程度の精度の結果が得られることから HTFEM の有用性を確認した．

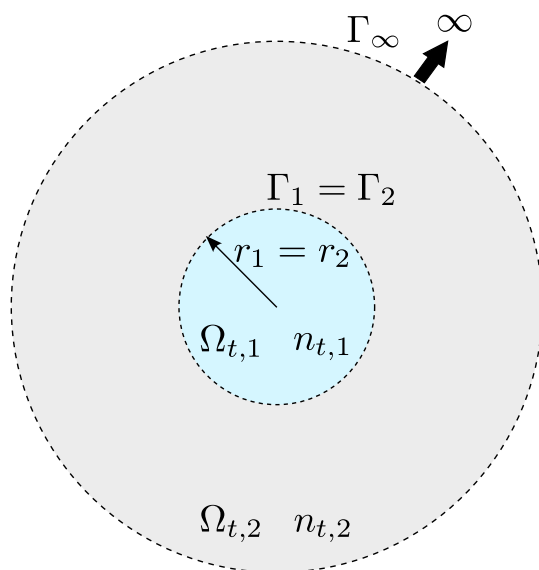


図 5.2 SIF の断面構造

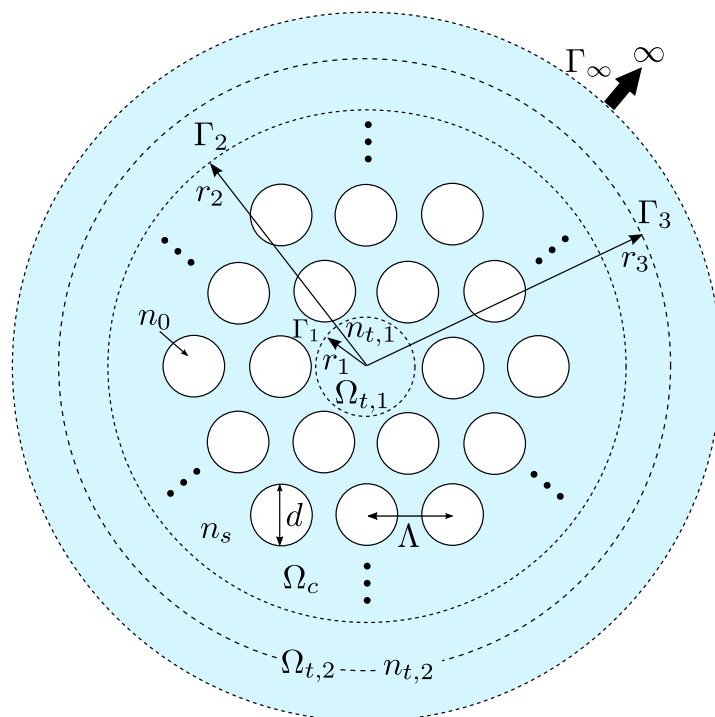


図 5.3 HF の円空孔の断面構造

表 5.1 SIF の HE₁₁ モードの実効屈折率の M_c 依存性

D_f	M_c	n_{eff}
48	48	$1.44325334418741 - j3.07 \times 10^{-16}$
	64	$1.44325334418519 + j5.58 \times 10^{-16}$
	80	$1.44325334418519 - j2.78 \times 10^{-16}$
	96	$1.44325334418518 - j3.13 \times 10^{-16}$
	112	$1.44325334418511 - j3.39 \times 10^{-16}$
	128	$1.44325334418512 + j3.21 \times 10^{-16}$
	144	$1.44325334418525 + j3.38 \times 10^{-16}$
	152	$1.44325334418499 - j2.15 \times 10^{-16}$
64	64	$1.44325334418741 + j4.41 \times 10^{-16}$
	80	$1.44325334418688 - j8.40 \times 10^{-16}$
	96	$1.44325334418688 + j2.60 \times 10^{-16}$
	112	$1.44325334418687 + j9.64 \times 10^{-16}$
	128	$1.44325334418688 - j2.25 \times 10^{-15}$
	144	$1.44325334418686 - j5.26 \times 10^{-16}$
	152	$1.44325334418687 - j4.28 \times 10^{-16}$
80	80	$1.44325334418741 - j4.37 \times 10^{-16}$
	96	$1.44325334418723 - j5.77 \times 10^{-15}$
	112	$1.44325334418722 - j2.04 \times 10^{-15}$
	128	$1.44325334418724 - j6.40 \times 10^{-15}$
	144	$1.44325334418723 - j2.09 \times 10^{-15}$
	152	$1.44325334418722 + j6.57 \times 10^{-15}$
Analytic solution		1.44325334418741

表 5.2 SIF の HE₁₁ モードの実効屈折率の D_f 依存性

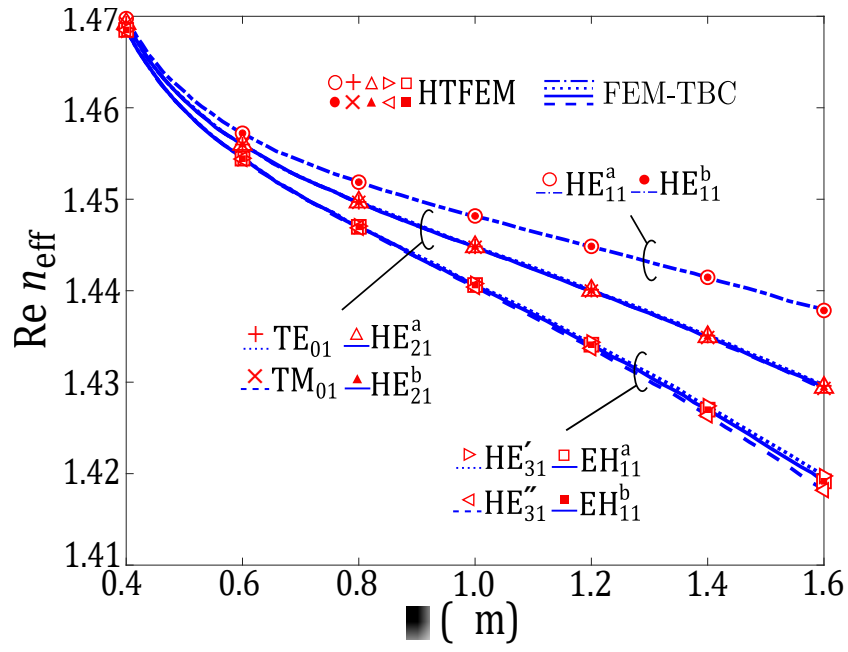
$D_f = M_c$	n_{eff} (double-precision)	n_{eff} (quadruple-precision)
16	$1.44325334418741 - j1.94 \times 10^{-16}$	$1.44325334418741 - j8.05 \times 10^{-35}$
32	$1.44325334418741 + j2.00 \times 10^{-16}$	$1.44325334418741 + j5.49 \times 10^{-35}$
48	$1.44325334418741 - j3.07 \times 10^{-16}$	$1.44325334418741 + j1.55 \times 10^{-33}$
64	$1.44325334418741 + j4.41 \times 10^{-16}$	$1.44325334418741 - j1.35 \times 10^{-31}$
80	$1.44325334418741 + j4.43 \times 10^{-18}$	$1.44325334418741 + j4.26 \times 10^{-32}$
96	$1.44325334418746 + j1.32 \times 10^{-14}$	$1.44325334418741 - j1.01 \times 10^{-32}$
112	$1.44325334418736 + j1.39 \times 10^{-15}$	$1.44325334418741 - j1.10 \times 10^{-30}$
128	$1.44325334418737 - j1.21 \times 10^{-14}$	$1.44325334418741 + j3.90 \times 10^{-32}$
144	$1.44325334418751 - j1.77 \times 10^{-13}$	$1.44325334418741 - j1.37 \times 10^{-31}$
152	$1.44325334418729 + j1.23 \times 10^{-13}$	$1.44325334418741 + j6.46 \times 10^{-31}$
Analytic solution	1.44325334418741	

表 5.3 HF の HE₁₁ モードの実効屈折率の DOF 依存性

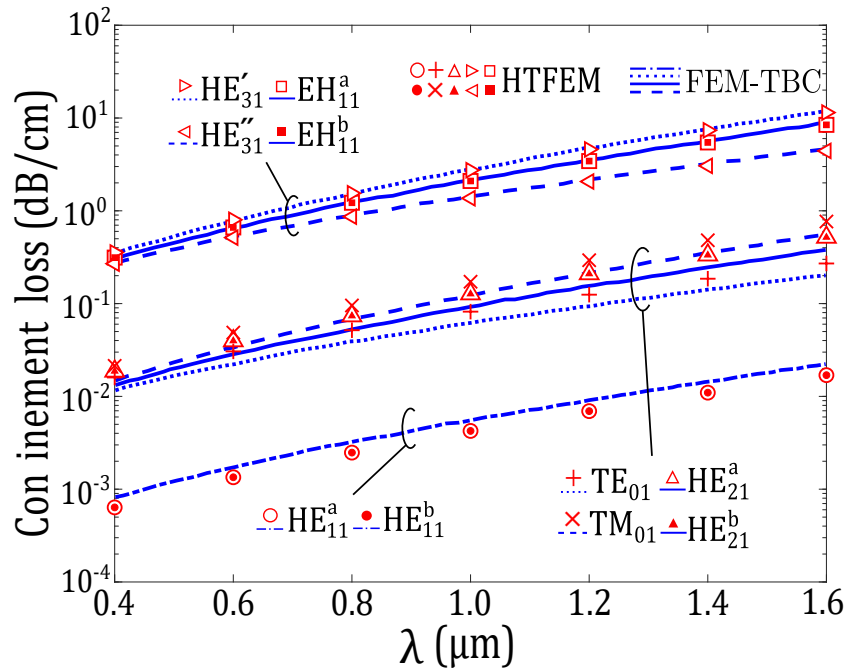
D_f	D_e	DOF	n_{eff}
12	120	1488	$1.445400086 - j4.2218 \times 10^{-8}$
24	480	5856	$1.445389826 - j3.1575 \times 10^{-8}$
36	1080	13104	$1.445394060 - j3.1767 \times 10^{-8}$
48	1920	23232	$1.445395013 - j3.1868 \times 10^{-8}$
60	3000	36240	$1.445395260 - j3.1907 \times 10^{-8}$
72	4320	52128	$1.445395325 - j3.1924 \times 10^{-8}$
84	5880	70896	$1.445395335 - j3.1932 \times 10^{-8}$
96	7680	92544	$1.445395330 - j3.1936 \times 10^{-8}$
108	9720	117072	$1.445395320 - j3.1939 \times 10^{-8}$
120	12000	144480	$1.445395310 - j3.1941 \times 10^{-8}$

表 5.4 HF の実効屈折率の N_R 依存性

N_R	N_c	Mode	HTFEM	MM	FEM-TBC [80]
1	6	HE ₁₁ ^a	$1.445395325 - j3.192 \times 10^{-8}$	$1.445395232 - j3.195 \times 10^{-8}$	$1.4453935 - j4.11 \times 10^{-8}$
		HE ₁₁ ^b	$1.445395325 - j3.192 \times 10^{-8}$	$1.445395232 - j3.195 \times 10^{-8}$	$1.4453931 - j4.12 \times 10^{-8}$
		TE ₀₁	$1.438583788 - j5.309 \times 10^{-7}$	$1.438583647 - j5.311 \times 10^{-7}$	$1.4385760 - j3.97 \times 10^{-7}$
		HE ₂₁ ^a	$1.438445016 - j9.718 \times 10^{-7}$	$1.438444832 - j9.731 \times 10^{-7}$	$1.4384376 - j7.11 \times 10^{-7}$
		HE ₂₁ ^b	$1.438445016 - j9.718 \times 10^{-7}$	$1.438444832 - j9.731 \times 10^{-7}$	$1.4384419 - j7.13 \times 10^{-7}$
		TM ₀₁	$1.438364824 - j1.414 \times 10^{-6}$	$1.438364934 - j1.416 \times 10^{-6}$	$1.4383622 - j1.03 \times 10^{-6}$
2	18	HE ₁₁ ^a	$1.445395135 - j4.721 \times 10^{-15}$	$1.445395179 - j4.761 \times 10^{-15}$	
		HE ₁₁ ^b	$1.445395135 - j4.746 \times 10^{-15}$	$1.445395179 - j4.921 \times 10^{-15}$	
		TE ₀₁	$1.438583069 - j6.834 \times 10^{-13}$	$1.438583575 - j6.848 \times 10^{-13}$	
		HE ₂₁ ^a	$1.438444441 - j1.866 \times 10^{-12}$	$1.438444642 - j1.883 \times 10^{-12}$	
		HE ₂₁ ^b	$1.438444441 - j1.866 \times 10^{-12}$	$1.438444642 - j1.883 \times 10^{-12}$	
		TM ₀₁	$1.438364542 - j3.106 \times 10^{-12}$	$1.438364640 - j3.142 \times 10^{-12}$	
3	36	HE ₁₁ ^a	$1.445394818 - j2.286 \times 10^{-16}$	$1.445395179 - j2.942 \times 10^{-17}$	
		HE ₁₁ ^b	$1.445394818 - j3.713 \times 10^{-15}$	$1.445395179 - j2.549 \times 10^{-16}$	
		TE ₀₁	$1.438581552 + j1.100 \times 10^{-15}$	$1.438583575 + j3.197 \times 10^{-17}$	
		HE ₂₁ ^a	$1.438443541 + j1.429 \times 10^{-16}$	$1.438444642 - j4.826 \times 10^{-17}$	
		HE ₂₁ ^b	$1.438443541 + j1.369 \times 10^{-15}$	$1.438444642 + j9.395 \times 10^{-17}$	
		TM ₀₁	$1.438364505 - j8.693 \times 10^{-18}$	$1.438364640 + j1.788 \times 10^{-17}$	



(a) 実効屈折率 n_{eff} の実部



(b) 閉じ込め損失

図 5.4 空孔数 6 の HF の実効屈折率の波長依存性

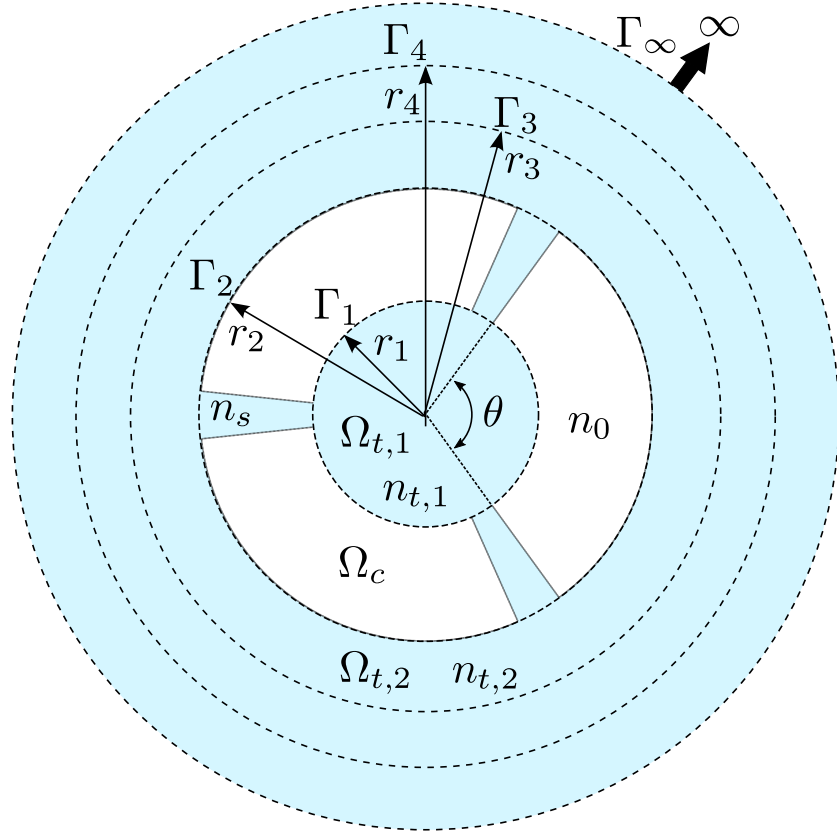


図 5.5 環状空孔 HF の断面構造

表 5.5 環状空孔 HF の実効屈折率

Mode	HTFEM	FEM-PML	FEM-TBC [80]
HE_{11}^a	$1.35589245863 - j5.0141697 \times 10^{-5}$	$1.355890424 - j5.0148043 \times 10^{-5}$	$1.35580 - j4.95 \times 10^{-5}$
HE_{11}^b	$1.35589245858 - j5.0141677 \times 10^{-5}$	$1.355890444 - j5.0148485 \times 10^{-5}$	$1.35581 - j4.96 \times 10^{-5}$
TE_{01}	$1.23963342633 - j5.1421678 \times 10^{-4}$	$1.239630232 - j5.1429064 \times 10^{-4}$	$1.23950 - j5.67 \times 10^{-4}$
TM_{01}	$1.21651970894 - j1.9514634 \times 10^{-3}$	$1.216524965 - j1.9514576 \times 10^{-3}$	$1.21655 - j1.96 \times 10^{-3}$
HE_{21}^a	$1.21491141708 - j1.2444588 \times 10^{-3}$	$1.214907132 - j1.2446519 \times 10^{-3}$	$1.21480 - j1.11 \times 10^{-3}$
HE_{21}^b	$1.21491141744 - j1.2444606 \times 10^{-3}$	$1.214907146 - j1.2446604 \times 10^{-3}$	$1.21479 - j1.11 \times 10^{-3}$

表 5.6 実効屈折率の計算時間

HTFEM	FEM-PML
25.4 s	14.9 s

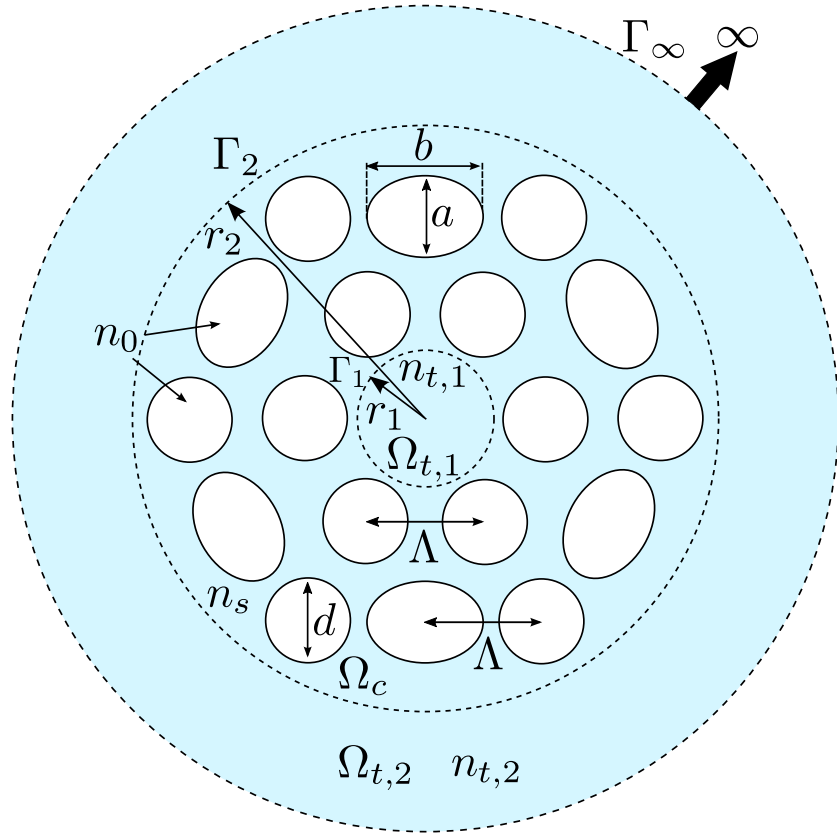
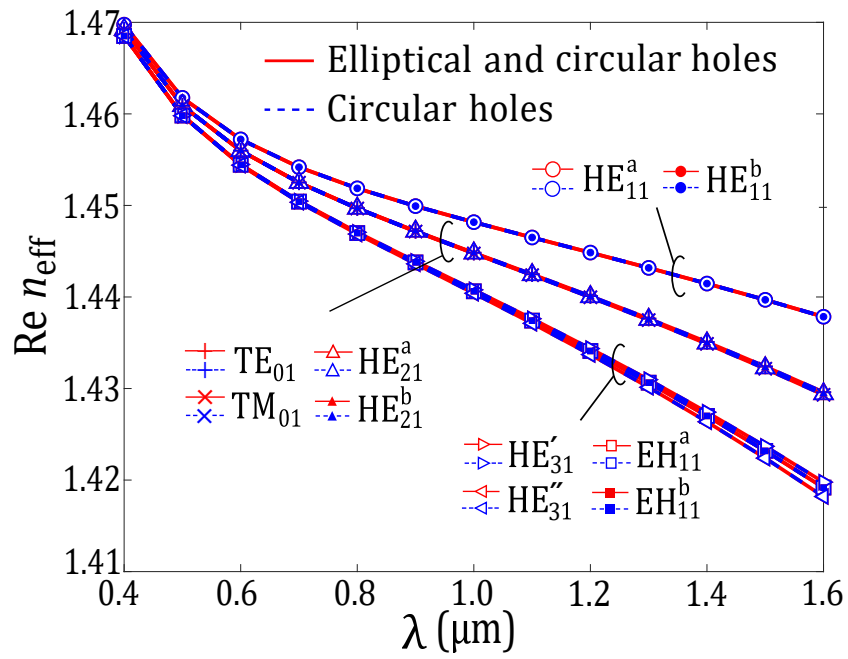
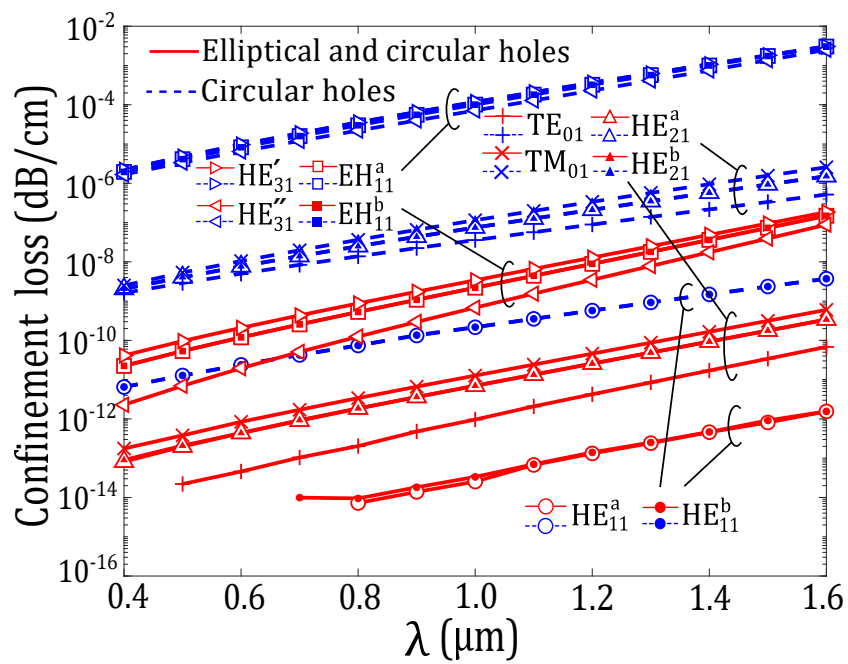


図 5.6 楕円形と円形の空孔で構成された HF の断面構造



(a) 実効屈折率 n_{eff} の実部



(b) 閉じ込め損失

図 5.7 基本モードから 10 モードの実効屈折率の波長依存性

6 結論

本論文は、光ファイバの自動最適化設計に実装可能な、光ファイバの分散特性値を高速かつ高精度に算出する手法について次の研究成果から示した。

1. SSM によって得られる一般化固有値問題の固有値数を 4 つ以下に制限し、行列式をとることにより得られる 4 次以下の代数方程式の解から固有値の陽関数表現の定式化を行い、自動微分を適用することで、1 階もしくは 2 階微分値を算出できることを示した。数値微分や高次近似多項式、陰関数定理に基づき微分計算する方法と ADEF の計算結果を比較し、ADEF の有用性を示した。
2. NEP にブロック版 SSM を適用し非縮退モードや縮退モードが計算できることを示した。また SSM の求解結果から SSM に起因するスプリアス解を除去するための判別指標、係数行列の条件数の逆数、残差、固有値の条件数から、低計算コストである固有値の条件数で判別できることを示した。
3. MM の波動関数展開次数の上限を緩和するため新たに、MM の定式化中の散乱行列の計算に逆行列の計算が不要な Type A と Type B の定式化を示した。Type B の定式化は従来、Type A の定式化よりも波動関数展開の展開次数の上限を緩和できること。従来の定式化と計算時間が同程度であることを示した。また SSM のパラメータであるモーメント次数を 1 に固定して良いことを示した。
4. Trefftz 法に課されていた形状の制約を取り除くため、通常要素と Trefftz 要素を併用できる HTFEM に SSM を適用する伝搬特性解析法の SIF と HF の数値計算結果を MM や FEM と比較し、精度よく求解できることを示した。

謝辞

本研究を進めるにあたり，多大な御指導，御鞭撻をいただきました研究指導教員である室蘭工業大学大学院工学研究科もの創造系領域 長谷川弘治教授に感謝致します．また副指導教員，御指導，御助言をいただきました本学大学院工学研究科もの創造系領域，辻寧英教授，渡邊浩太教授に心から感謝いたします．

日頃，御討論，御助言を頂きました本研究室の皆様に感謝致します．

参考文献

- [1] N. A. Issa and L. Poladian, “Vector Wave Expansion Method for Leaky Modes of Microstructured Optical Fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 21, no. 4, pp. 1005–1012, Apr. 2003.
- [2] T. Hasegawa, E. Sasaoka, M. Onishi, M. Nishimura, Y. Tsuji, M. Koshiba, “Hole-assisted lighguide fiber for large anomalous dispersion and low optical loss,” *Opt. Express*, vol. 9, no. 13, pp. 681–686, Dec. 2001.
- [3] N. A. Issa and L. Poladian, “Highly birefringent Index-Guiding Photonic crystal fibers,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 13, no. 6, pp. 588–590, June 2001.
- [4] J. Sultana, M. S. Islam, M. Faisal, M. R. Islam, B. W. H. Ng, H. Ebendorff-Heidepriem and D. Abbott, “Highly birefringent elliptical core photonic crystal fiber for terahertz application,” *Optics Communications*, vol. 407, no. 15, pp. 92–96, July. 2018.
- [5] A. Huttunen and P. Törmä, “Optimization of dual-core and microstructure geometries for dispersion compensation and large mode area,” *Optics express*, vol. 13, no. 2, pp. 627–635, July. 2005.
- [6] Z. Zhong, Y. Tsuji and M. Eguchi, “Single Radial/Azimuthal mode photonic crystal fibers with anisotropic elliptical-hole lattice core,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 29, no. 16, pp. 1285–1288, Aug. 2017.
- [7] G. Ouyang, Y. Xu and A. Yariv, “Comparative study of air-core and coaxial Bragg fibers: single-mode transmission and dispersion characteristics,” *Opt. Express*, vol. 9, no. 13, pp. 733–747, Dec. 2001.
- [8] M. Koshiba, K. Saitoh, K. Takenaga and S. Matsuo, “Multi-core fiber design and analysis: coupled-mode theory and coupled-power theory,” *Opt. Express*, vol. 19, no. 26, pp. B102–B111, Dec. 2011.
- [9] T. Hayashi, T. Taru, O. Shimakawa, T. Sasaki and E. Sasaoka, “Design and fabrication of ultra-low crosstalk and low-loss multi-core fiber,” *Opt. Express*, vol. 19, no. 17, pp. 16576–16592, Aug. 2011.
- [10] T. A. Birks, J. C. Knight and P. St. J. Russell, “Endlessly single-mode photonic crystal fiber,” *Opt. Lett.*, vol. 22, no. 13, pp. 961–963, July 1997.
- [11] P. St. J. Russell, “Photonic-crystal fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 24, no. 12, pp. 4729–4749, Dec. 2006.
- [12] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*. Tokyo, Japan: KTK Scientific, 1992.
- [13] T. Okoshi, *Optical Fibers*. New York, NY, USA: Academic Press, 1982.
- [14] K. Okamoto, *Fundamentals of Optical Waveguides*. 2nd ed., Burlington, MA, USA: Academic Press, 2006.
- [15] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. 3rd ed., New York, NY, USA: John

Wiley&Sons, 2014.

- [16] K. Saitoh, M. Koshiba, T. Hasegawa and E. Sasaoka, “Chromatic dispersion control in photonic crystal fibers: application to ultra-flattened dispersion,” *Optics express*, vol. 11, no. 8, pp. 843–852, April 2003.
- [17] K. Saitoh and M. Koshiba, “Numerical modeling of photonic crystal fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 23, no. 11, pp. 3580–3590, Nov. 2005.
- [18] M. Koshiba, “Full-vector analysis of photonic crystal fibers using the finite element method,” *IEICE Trans. Electron.*, vol. E85-C, no. 4, pp. 881–888, April 2002.
- [19] Q. H. Qin, *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*. Southampton, UK: WIT Press, 2000.
- [20] Z. C. Li, T. T. Lu, H. Y. Hu and A. H. D. Cheng, *Trefftz and Collocation Methods*. Southampton, UK: WIT Press, 2008.
- [21] J. P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, Oct. 1994.
- [22] A. Taflove, Ed., *Advances in FDTD Computational Electrodynamics*. Boston, MA, USA: Artech House, 2013.
- [23] W. C. Chew and W. H. Weedon, “A 3D perfectly matched medium from modified maxwell’s equations with stretched coordinates,” *Micro. Opt. Technol. Lett.*, vol. 7, no. 11, pp. 371–373, Sep. 1994.
- [24] F. L. Teixeira and W. C. Chew, “Systematic Derivation of Anisotropic PML Absorbing Media in Cylindrical and Spherical Coordinates,” *IEEE Micro. guided wave Lett.*, vol. 7, no. 13, pp. 599–604, Sep. 1994.
- [25] B. Vial, F. Zolla, A. Nicolet, M. Commandre and S. Tisserand, “Adaptive perfectly matched layer for Wood’s anomalies in diffraction gratings,” *Optics express*, vol. 20, no. 27, pp. 28094–28105, Dec. 2012.
- [26] F. L. Teixeira and W. C. Chew, “Unified analysis of perfectly matched layers using differential forms,” *Microw. Opt. Technol.*, vol. 20, no. 2, pp. 124–126, Jan. 1999.
- [27] W. C. Chew, J. M. Jin and E. Michelssen, “Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 15, no. 6, pp. 363–369, Aug. 1997.
- [28] J. W. David, M. Kingsland, J. Lee and R. Lee, “A comparison of anisotropic PML to Berenger’s PML and its application to the finite-element method for EM scattering,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 1, pp. 40–50, Jan. 1997.
- [29] K. Saitoh and M. Koshiba, “Leakage loss and group velocity dispersion in air-core photonic bandgap fibers,” *Opt. Express*, vol. 11, no. 23, pp. 3100–3109, Nov. 2003.
- [30] R. Jedidi and R. Pierre, “High-order finite-element methods for the computation of bending loss in optical waveguides,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 25, no. 9, pp. 2618–2630, Sep. 2007.
- [31] L. An, Z. Zheng, Z. Li, T. Zhou, and J. Cheng, “Ultrahigh birefringent photonic crystal fiber with ultralow confinement loss using four airholes in the core,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 27, no. 15,

- pp. 3175–3180, Aug. 2009.
- [32] T. P. White et al., “Multipole method for microstructured optical fibers. I. Formulation,” *J. Opt. Soc. Amer. B*, vol. 19, no. 10, pp. 2322–2330, Oct. 2002.
 - [33] T. B. Kuhlmeier et al., “Multipole method for microstructured optical fibers. II. Implementation and results,” *J. Opt. Soc. Amer. B*, vol. 19, no. 10, pp. 2331–2340, Oct. 2002.
 - [34] K. Yasumoto, *Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals*. Boca Raton, USA: CRC Press, 2006.
 - [35] V. Jandieri, K. Yasumoto, A. Sharma and H. Chauhan, “Modal analysis of Specific microstructured optical fibers using a model of layered cylindrical arrays of circular rods,” *IEICE Trans. electron.*, vol. E93-C, no. 1, pp. 17–23, Jan. 2011.
 - [36] T. Sakurai and H. Sugawara, “A projection method for generalized eigenvalue problems using numerical integration,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 159, no. 1, pp. 119–128, Dec. 2002.
 - [37] T. Sakurai and H. Sugiura, “A projection method for generalized eigenvalue problems,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 159, pp. 119–128, 2003.
 - [38] T. Ikegami, T. Sakurai and U. Nagashima, “A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 233, pp. 1927–1936, 2009.
 - [39] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, “A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals,” *JSIAM Lett.*, vol. 1, pp. 52–55, May 2009.
 - [40] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, “A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral,” *Japan J. Indust. Appl. Math.*, vol. 27, no. 1, pp. 73–90, June 2010.
 - [41] T. Sakurai, J. Asakura, H. Tadano and T. Ikegami, “Error analysis for a matrix pencil of Hankel matrices with perturbed complex moments,” *JSIAM Lett.*, vol. 1, pp. 76–79, May 2009.
 - [42] T. Sakurai and H. Tadano, “A parallel eigensolver using contour integration for generalized eigenvalue problems in molecular simulation,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 14, no. 3A, pp. 825–837, June 2010.
 - [43] H. Ohno, Y. Kuramashi, T. Sakurai and H. Tadano, “A quadrature-based eigensolver with a Krylov subspace method for shifted linear systems for Hermitian eigenproblems in lattice QCD,” *JSIAM Lett.*, vol. 2, pp. 115–118, Dec. 2010.
 - [44] 森田 好人, 嶋田 賢男, 長谷川 弘治, 佐藤 慎悟, “開放型電磁導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法,” *計算数理工学論文集*, vol. 10, no. 16-101210, pp. 84–92, Dec. 2010.
 - [45] S. Sato, T. Shimada and K. Hasegawa, “Extraction of all propagation constants in a specified region from the transcendental equation of a dispersion relation using the Sakurai-Sugiura projection method,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 32, no. 7, pp. 1216–1221, July 2015.

- [46] 嶋田 賢男, 森田 好人, 長谷川 弘治, 佐藤 慎悟 “電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素法への混入解,” 計算数理工学論文集, vol. 11, no. 01-111216, pp. 1–6, Dec. 2011.
- [47] 嶋田 賢男, 森田 好人, 長谷川 弘治, 佐藤 慎悟 “電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法 (線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法),” 計算数理工学論文集, vol. 12, no. 06-121212, pp. 31–36, Dec. 2012.
- [48] 森田 好人, 佐藤 慎悟, 長谷川 弘治, 嶋田 賢男, “縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法,” 計算数理工学論文集, vol. 13, no. 16-131129, pp. 73–78, Nov. 2013.
- [49] 森田 好人, 佐藤 慎悟, 長谷川 弘治, 嶋田 賢男, “電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析,” 計算数理工学論文集, vol. 14, no. 13-141206, pp. 49–54, Dec. 2014.
- [50] 森田 好人, 佐藤 慎悟, 長谷川 弘治, 嶋田 賢男, “伝搬方向に一樣な電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法,” 信学技報, pp. 181–186, July. 2014.
- [51] 森田 好人, 佐藤 慎悟, 長谷川 弘治, “電磁波導波路固有値問題の Multipole method 解析における求解法の検討,” 信学技報 EST, vol. 115, no. 141, pp. 111–116, July. 2015.
- [52] 宮田 孝史, 朴 磊, 曾我部 知広, 山本 有作, 張 紹良, “多重連結領域の固有値問題に対する Sakurai-Sugiura 法の拡張,” 日本応用数理学会論文誌, vol. 19, no. 4, pp. 537–550, Oct. 2009.
- [53] 櫻井 鉄也, “非線形固有値問題に対する周回積分を用いた数値解法,” 日本応用数理学会, vol. 19, no. 4, pp. 537–550, Oct. 2009.
- [54] T. Sakurai, Y. Futamura and H. Tadano, “Efficient parameter estimation and implementation of a contour integral-based eigensolver,” *Journal of Algorithms and Computational Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 249–269, Jan 2013.
- [55] Y. Maeda, Y. Futamura and T. Sakurai, “Stochastic estimation method of eigenvalue density for nonlinear eigenvalue problem on the complex plane,” *JSIAM Lett.*, vol. 3, pp. 61–64, Aug. 2011.
- [56] Y. Futamura, H. Tadano and T. Sakurai, “Parallel stochastic estimation method of eigenvalue distribution,” *JSIAM Lett.*, vol. 2, pp. 127–130, Oct. 2010.
- [57] 前田 恭行, 櫻井 鉄也, “周回積分を用いた固有値解法の円弧領域に対する拡張,” 情報処理学会論文誌, vol. 8, no. 4, pp. 88–97, Nov. 2015.
- [58] C. L. Chen, *Foundations for guided-wave optics*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley&Sons, 2009.
- [59] A. J. Liounis and J. A. Christian, “Techniques for generating analytic covariance expressions for eigenvalues and eigenvectors,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 64, no. 7, pp. 1808–1821, April 2016.
- [60] M. I. Friswell, “The Derivatives of repeated eigenvalues their associated eigenvectors,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 118, no. 3, pp. 390–397, Jul. 1996.
- [61] S. Adhikari and M. I. Friswell, “Calculation of eigensolution derivatives for nonviscously damped systems using Nelson’s method,” *AIAA. Journal*, vol. 44, no. 8, pp. 390–397, Aug. 2006.

- [62] X. Y. Long, C. Jiang and X. Han, "New method for eigenvector-sensitivity analysis with repeated eigenvalues and eigenvalue derivatives," *AIAA. Journal*, vol. 53, no. 5, pp. 1226–1235, May 2015.
- [63] R. B. Nelson, "Simplified calculation of eigenvector derivatives," *AIAA J.*, vol. 14, no. 9, pp. 1201–1204, Sept. 1976.
- [64] M. I. Friswell and S. Adhikari, "Derivatives of complex eigenvectors using Nelson's method," *AIAA J.*, vol. 38, no. 12, pp. 2355–2357, June 2000.
- [65] B. S. Wu, Z. H. Xu and Z. G. Li, "Improved Nelson's method for computing eigenvector derivative with distinct and repeated eigenvalues," *AIAA J.*, vol. 45, no. 4, pp. 950–952, April 2007.
- [66] M. I. Friswell, "Calculation of second and higher order eigenvector derivatives," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 4, pp. 919–921, Sept. 1994.
- [67] Z. Xu and B. Wu, "Derivatives of complex eigenvectors with distinct and repeated eigenvalues," *Int. J. Numerical Methods Eng.*, vol. 75, no. 8, pp. 945–963, Aug. 2008.
- [68] A. L. Andrew and R. C. E. Tan, "Computation of derivatives of repeated eigenvalues and the corresponding eigenvectors of symmetric matrix pencils," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 20, no. 1, pp. 78–100, Sept. 1998.
- [69] P. R. McIsaac, "Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides—I: Summary of result," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. MTT-23, no. 5, pp. 421–429, May 1975.
- [70] P. R. McIsaac, "Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides—II: Theory," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. MTT-23, no. 5, pp. 429–433, May 1975.
- [71] Q. Li, Y. Huang, Z. Jia, C. Yao, G. Qin, Y. Ohishi and W. Qin, "Design of Fluorotellurite microstructured fibers with near-zero-flattened dispersion profiles for optical-frequency comb generation," *J. Lightw. Technol.*, vol. 36, no. 11, pp. 2211–2215, June 2018.
- [72] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2010, p.23.
- [73] 伊理 正夫, 線形代数 I, 岩波書店, 東京都, 1993.
- [74] Advanpix, Multiprecision Computing Toolbox for MATLAB. Available:<http://www.advanpix.com>.
- [75] J. W. Fleming, "Dispersion in GeO_2 - SiO_2 glasses," *Appl. Opt.*, vol. 23, no. 24, pp. 4493–1209, Dec. 1984.
- [76] 赤池 弘次, 甘利 俊一, 北川 源四郎, 樺島 洋介, 下平 英寿, 赤池情報量基準 AIC-モデリング・予測・知識発見, 共立出版株式会社, 東京都, 2007.
- [77] K. M. Lo, R. C. McPhedran, I. M. Bassett and G. W. Milton, "An electromagnetic theory of dielectric waveguides with multiple embedded cylinders," *J. Lightw. Technol.*, vol. 12, no. 3, pp. 396–410, Mar. 1994.
- [78] Z. Zhu and T. G. Brown, "Multipole analysis of hole-assisted optical fibers," *Opt. Commun.*, vol. 206, pp. 333–339, June 2002.
- [79] K. Oyamada and T. Okoshi, "Two-dimensional finite-element method calculation of propagation

- characteristics of axially nonsymmetrical optical fibers,” *Radio Sci.*, vol. 17, no. 1, pp. 109–116, Jan.–Feb. 1982.
- [80] H. P. Uranus and H. J. W. M. Hoekstra, “Modelling of microstructured waveguides using a finite-element-based vectorial mode solver with transparent boundary conditions,” *Opt. Express*, vol. 12, no. 12, pp. 2795–2809, June 2004.
- [81] J. Jirousek and N. Leon, “A powerful finite element for plate bending,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 12, no. 1, pp. 77–96, 1977.
- [82] J. Jirousek and L. Guex, “The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending,” *Int. J. Numerical Methods Eng.*, vol. 23, pp. 651–693, 1986.
- [83] Q. H. Qin, “Trefftz finite element method and its applications,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 58, no. 5, pp. 316–337, Sep. 2005.
- [84] M. Gyimesi, I. Tsukerman and D. Lavers, “Hybrid finite element-Trefftz method for open boundary analysis,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 671–674, May 1996.
- [85] A. P. Zielenski and O. C. Zienkiewicz, “Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions,” *Int. J. Numerical Methods Eng.*, vol. 21, pp. 509–528, 1985.
- [86] S. Sato, K. Hasegawa and Y. Tsushima, “Finding propagation constants of leaky and degenerate modes simultaneous transcendental equations of holey optical fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 35, no. 14, pp. 2871–2879, July 2017.
- [87] L. Cairo and T. Kahan, *Variational Techniques in Electromagnetism*, Gordon and Breach, 1965.
- [88] I. H. Maltson, “Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 55, no. 10, pp. 1205–1209, Oct. 1965.
- [89] P. Kowalczyk, M. Wiktor and M. Mrozowski, “Efficient finite difference analysis of microstructured optical fibers,” *Opt. Express*, vol. 13, no. 25, pp. 10349–10359, Dec. 2005.
- [90] D. R. Burke and T. J. Smy, “A meshless based solution to vectorial mode fields in optical micro-structured waveguides using leaky boundary conditions,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 31, no. 8, pp. 1191–1197, Apr. 2013.

論文目録

原著論文

- (1) Y. Tsushima, S. Sato and K. Hasegawa, “Computing group velocities and group-velocity dispersions of optical fibers through automatic differentiation of explicit forms of propagation constants,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 38, no. 21, pp. 6047–6056, June 2020.
- (2) S. Sato, K. Hasegawa and Y. Tsushima, “Finding propagation constants of leaky and degenerate modes simultaneous transcendental equations of holey optical fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 35, no. 14, pp. 2871–2879, July 2017.
- (3) S. Sato, K. Hasegawa, N. Mizukami and Y. Tsushima, “Hybrid Trefftz Finite-Element Method for Analyzing the Eigenmodes of Optical Fibers,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 37, no. 3, pp. 1029–1036, Feb. 2019.

学会発表

国際会議

- (1) Y. Tsushima, S. Sato, Y. Morita and K. Hasegawa, “Eigenmode Analysis of a Holey Fiber by Multipole Method with the Sakurai-Sugiura Projection Method,” Progress In Electromagnetics Research Symposium 2016 Shanghai, Aug. 2016.
- (2) Y. Tsushima, S. Sato and K. Hasegawa, “An analysis of eigenmodes propagating on a holey fiber with the multipole method and the Sakurai-Sugiura method,” Progress In Electromagnetics Research Symposium 2017 St Petersburg, May 2017.